代数拓扑和微分拓扑简史

Concise History of Algebraic and Differential Topology

干丹岩 著

湖南教育出版社

数学学科专题史丛书

代数拓扑和微分拓扑简史

Concise history of Algebraic and Differential Topology

干丹岩 著

湖南教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

代数拓扑和微分拓扑简史/干丹岩著. —长沙：湖南教育出版社，2005
（数学学科专题史丛书）

Ⅰ.代... Ⅱ.干... Ⅲ.①代数拓扑—数学史②微分拓扑—数学史 Ⅳ.0189－09

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 014361 号

代数拓扑和微分拓扑简史

干丹岩 著

责任编辑:孟实华 邹伟华

湖南教育出版社出版发行(长沙市韶山北路 443 号)

网 址:http://www.hneph.com

电子邮箱:postmaster@hneph.com

湖南省新华书店经销 湖南广播电视大学印刷厂印刷

850×1168 32 开 印张:14.375 字数:358000

2005 年 2 月第 1 版 2005 年 2 月第 1 次印刷

印数:1—1500

ISBN7－5355－4480－0/G·4475

定价:23.70 元

序　　言

拓扑学的崛起，是20世纪数学发展中的显著现象. 1900年在Hilbert提出的23个问题中不见它的踪影，因为那时还只是刚刚出土的幼苗. 1950年代，它高歌猛进，从此登上了世界数学界的中心舞台，并且开始对其他数学学科产生深远的影响和渗透. 在国际数学家联盟所颁发的Fields奖中，拓扑学者以及与拓扑学有密切关系的学者占据了显要的地位. 拓扑学的激动人心的发现总是鼓舞着数学家们去不断开拓新的研究领域.

中国人对于拓扑学作出了重要的贡献，最著名的是陈省身示性类和关于示性类的吴文俊公式. 但是国内研究代数拓扑学和几何拓扑学的人数一直不多，大概是需要准备知识比较多的缘故. 所以对于介绍拓扑学的图书的需求特别迫切. 进一步，就要了解它的发展历程，来龙去脉，学术思想的变迁. 毕竟数学不只是数学知识的总和，还凝结着人类求知、创新活动的经验和智慧.

介绍拓扑学不容易，作者必须融会贯通，才能剥开数学术语的铠甲，说得使读者明白. 介绍拓扑学的历史更不容易，要从曲折纷繁的发展中理出主要线索，又常要跨出作者本人熟悉的范围，非常费力. 于丹岩教授涉猎宽广，能毅然挑起这付重担，为数学界作贡献，我非常敬佩和感谢.

国际上关于拓扑学历史的研究也不多. 法国大数学家Dieudonné著有截至1960年的《代数拓扑与微分拓扑史》(1989)和截至1950年的《拓扑学简史》(1994). 英国数学家James主编的《拓扑学的历史》(1999)，则是个文集，40篇文章各写一个领域、侧面或人物，大致讲到1980年左右. 近30年来，低维拓扑异军突起，由于和众多数学分支的相互作用，成为数学中突

出的生长点. 本书的最后三章介绍这个仍在迅猛发展的领域，是个大胆的尝试.

专注于拓扑学自身的历史时，对于拓扑学的应用、与别的学科的相互联系和相互推动，这些读者特别感兴趣的话题，往往照顾不够. 本书也是如此. 或许这是近乎苛求了.

我相信即使是拓扑学家，也会从本书获益匪浅.

姜伯驹

2004 年 5 月

作者的话

先说这本书的来历. 1997 年 9 月全国拓扑学会议举行之际，姜伯驹教授与我在金华双龙洞相会. 他一见面就向我布置写代数拓扑学和微分拓扑学的历史的任务. 我虽尽力恳辞而未果，不得已承担起这一项远远超出自己能力的工作.

本书主要介绍以 Poincaré 1895 年的著名论文 Analysis Situs 发表为标志的代数拓扑学和微分拓扑学的发展简史.

一门数学学科的历史如果只是一个编年史表，那意义就不大了. 我希望以编年史为线索，以课题为章节，从历史顺序中介绍各重大事件的发生，各基本概念和基本方法的创始和发展，各位重要人物如何起作用和各时期重大成就之联系.

作为单个的个人去看一门数学的历史，会发现历史像是一张照片. 其中有一部分是清楚的，那是位于"景深"范围内的. 超出这个范围的分两种，一种是太远的，景象模糊；另一种是太近的，也不清楚，需要过些时日再说.

这里写进来的只是历史事实中较少的一部分. 许多专门性的课题的历史有待国内许多专家结合自己的研究成果来论述.

最后，我在准备和写作过程中得到许多朋友的关心和支持. 我特别感谢段海豹、王诗宬、潘建中、陈坚、丁帆、李维萍等的帮助，没有他们的热心帮助，这个稿子不可能完成. 但稿子中的不妥和错误之处概由我本人负责，并请读者慨然指正，对此我预先表示谢意. 本书的写作受到浙江省自然科学基金资助，作者深表感谢.

2000 年 7 月于杭州老和山下

致 读 者

1. 本书用到以下常用记号.

N 自然数集，即$\mathbf{N}=\{1,2,\cdots\}$

Z 整数集，即$\mathbf{Z}=\{0,\pm 1,\pm 2,\cdots\}$

Q 有理数集

R 实数集

C 复数集

H 四元数集

$\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ 整数模 n 群或环

$\mathbf{R}^n$ n 维实线性空间，n 维实欧氏空间

$\mathbf{C}^n$ n 维复线性空间

2. 参考文献记号［ ］的引用可能是句子的成分，也可能不是句子的成分而是指示该句子中内容出自所引文献.［P 1, 2］指文献［P 1］和［P 2］.［P 1～7］指文献［P 1］，［P 2］，…，［P 7］. 而记号［Br 5；509～510］指文献［Br 5］的 509 页至 510 页.

目　录

第一章 萌 芽

拓扑学，特别是代数拓扑学与微分拓扑学，创立于 19 世纪与 20 世纪之交，可以认为是 20 世纪的一门数学．并且由于它的发展和向数学其他部门的渗透对整个现代数学的内容和面貌所产生的影响，可以认为 20 世纪在数学发展史上是拓扑学的世纪．这早已有人作出类似的论断，例如［Di 1］第 7 页．

虽然拓扑学是一门新的数学，但其萌芽很早．一般认为 18 世纪的瑞士数学家 L. Euler 和 19 世纪的德国数学家 B. Riemann 是拓扑学史前史的最伟大的拓扑学家．但史学家的研究发现有更早的记载，可追溯到 17 世纪的德国数学家 G. W. Leibniz 直至他的前辈法国数学家 R. Descartes.

拓扑学以前被人们称作位置分析（拉丁文 analysis situs）．拓扑学一词系英语 topology 或德语 Topologie 的中文音译．它是于 19 世纪中叶由德国人 J. B. Listing 提出的，源自希腊文 τοπος（位置或形势）与 λογos（学问）．但它被普遍采纳是 20 世纪 30 年代以后的事，现今已为全世界所通用．

§1.1 什么是拓扑学

拓扑学在民间以橡皮几何的称号流传，这在相当程度上（但

不完全!）正确地描述了拓扑学的特性. 它的好处是使普通百姓都能理解和接受拓扑学的基本想法. 那么究竟拓扑学是什么? 在作者的书架上的两本常用字典中就可查到"拓扑学". 在商务印书馆于 1979 年北京出版的中国社会科学院语言研究所词典编辑室编的《现代汉语词典》中解释"拓扑学"为:"数学的一个分支,研究几何图形在连续改变形状时还能保留不变的一些特性,它只考虑物体之间的位置关系而不考虑它们的距离和大小."在 Webster's New Collegiate Dictionary, G. & C. Merrian Company, Springfield, Massachusetts USA, 1973 中"topology"的定义 2a 为:"a branch of mathematics that investigates the properties of geometric configurations(as point sets)that are unaltered under elastic deformations that are homeomorphisms(数学的一个分支,它研究几何图形(作为点集)在那些是同胚的伸缩性形变之下不改变的性质)"再查"homeomorphism(同胚)"的定义 2 为:"a one-to-one mapping in topology between two figures that is continuous in both directions(拓扑学中两个图形之间的一对一的双方连续的映射)".

上面引用的两本字典中的话可以作为拓扑学的正式定义. 没有学过拓扑学的读者可以此为出发点来阅读本书. 但是, 要想对后面的专门内容有很好的理解, 则需要有较好的数学的成熟性的修养或相应的专业的训练, 并且建议读者参考有关的教科书.

§1.2 Descartes 与 Euler 定理

19 世纪中叶, Foucher de Careil 伯爵在汉诺威王家图书馆保存的 Leibniz 的文稿中发现 Leibniz 作为外交家在巴黎逗留时期(1672—1676)所做的 Descartes 的一项题为 De Solidorum Elementis 的著作的抄件, 而 Descartes 的原稿已失轶, 此抄件后来由

Foucher de Careil 伯爵于 1859 年出版的《Descartes 的未发表的著作》一书与其他未发表的著作一道发表了，见[De]的 214 页及以后各页.

这篇著作由于有些记号很难懂，1860 年 E. Prouhet 在［Pr; 484］中作了纠正. 人们发现其中有一个命题的直接推论便是 Euler 的多面体定理.

Descartes 的定理说："在任何一个多面体中，各立体角之和等于 8 个立体直角".

关于这个定理，J. Bertrand 在 1860 年说："由 Descartes 考虑的一个多面体的外角之和当多面体换成一个曲面时便变成几何学当今成就中起重要作用的元素，对此 Gauss 称之为全曲率. 这个 Descartes 定理应用于一个凸曲面说，一个凸曲面的全曲率等于 4π"［Be］.

若记所有平面角之和为 ω，顶点数为 e，边棱数为 k，面数为 f，此命题说

$$2\pi e-\omega=4\pi,$$

即当取直角为单位时

$$\omega=4(e-2). \tag{1}$$

另一方面，设 w 为所有平面角之数，则有关系

$$w=\frac{4f+\omega}{2} \tag{2}$$

及

$$w=2k \tag{3}$$

比较(1)与(2)及(3)便推出 Euler 定理

$$e-k+f=2. \tag{4}$$

数学界对此看法不一，出现了两派针锋相对的见解，一派将 Euler 定理归功于 Descartes，而另一派则不同意. 不过，现代的数学史家美国人 M. Kline 在[Kli]的第 50 章中承认"Descartes 在 1639 年就知道这个性质(指 Euler 定理)，并且通过 Descartes 的未发表

的手稿，Leibniz 在 1675 年也知道这个性质”.

§1.3 Leibniz 与位置分析

Leibniz于 1679 年 9 月 8 日给荷兰物理学家和数学家 C. Huygens 去了一封信［Lei；19～20］，信中说到他不满意坐标几何研究几何图形的方法，因为这方法除了不直接和不美观之外，关心的还只是量，而“我相信我们缺少另一门分析的学问，它是真正几何的和线性的，它能直接地表示位置（situs），如同代数表示大小一样”．但他的想法未能激起 Huygens 的热情．

Leibniz 同一年发表了《几何特性》，试图阐述几何图形的基本几何性质，他把他的研究叫做位置分析（analysis situs）．可以确信至少部分地是指的拓扑学．

这样一来，Leibniz 这位最善于发明数学记号的数学家也偶然地设计了一个学科的名称．大约 60 年后的 Euler 正是采用了位置分析这一名称，他在解决哥尼斯堡桥之谜的论文中的第一句话就提及，是 Leibniz 第一次谈到并称之为“位置几何（geometria situs）”［Eu 1］．

§1.4 Euler 的贡献

Euler 的第一项有关组合拓扑学的研究是解决哥尼斯堡桥问题．哥尼斯堡现为俄罗斯的加里宁格勒，原为东普鲁士首府，是哲学家 I. Kant 出生和下葬的地方，也是数学家 D. Hilbert 出生的地方．原来这个城市有七座桥（现在已有更多的桥了）连接河岸及河中的岛屿（如图 1）．老百姓中流传的一个消遣问题是：

能否找到一条路线通过所有七座桥，并且每座桥只通过一次？

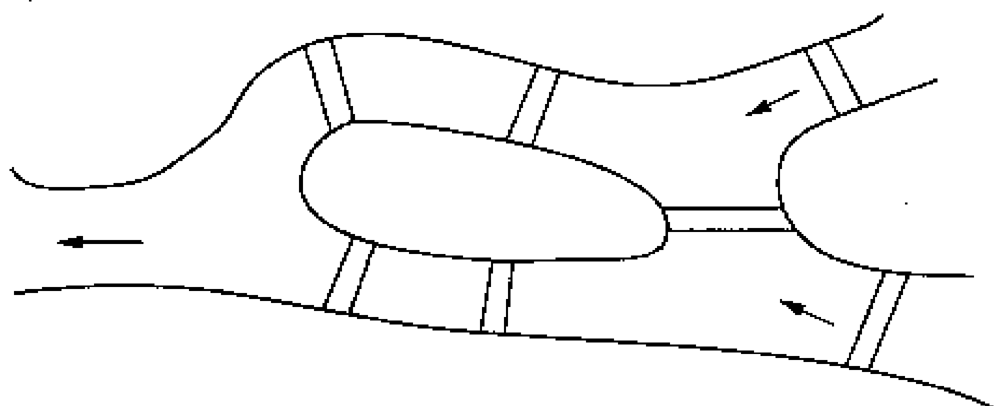


图 1

Euler 于 1736 年写了论文 [Eu 1]，用点代表陆地，用线段代表桥，将问题一般化成为一笔画--个连通的图（graph）的问题，并给出了完全的解答. 对哥尼斯堡桥问题答案是否定的. 这篇文章是我们能找到的真正属于拓扑学的第一篇发表了的作品.

Euler 的第二项有关组合拓扑学的结果是熟知的关于多面体的 Euler 定理. 设给了一个凸多面体，记其顶点数为 v，棱边数为 e，面数为 f，则有等式

$$v - e + f = 2.$$

Euler 在 1750 年发表了这个结果 [Eu 2]，并用以对多面体分类. 他 1751 年给了一个证明 [Eu 3]，但证明中有漏洞.

1794 年法国数学家 A.-M. Legendre 给了一个很巧妙的证明 [Leg; 228～229]. 在凸多面体的内部取定任意点和一个半径为 1 以该点为中心的球面. 将多面体投影到这个球面上，使每个面变成一个球面多边形. 我们知道这样的球面多边形的面积有下列关系：

$$A_j = \sum_{i=1}^{n_j} \alpha_{ij} - \pi(n_j - 2),$$

其中 α_{ij}是第 j 个球面多边形的第 i 个角，n_j 是第 j 个多边形的边的数目.

按多面体是凸的假设，投影到球面上的球面多边形既无重叠又无空缺．因此各球面多边形之并的面积等于球面之面积，于是得：

$$4\pi = \sum_{j=1}^{f} \left(\sum_{i=1}^{n_j} \alpha_{ij} - \pi(n_j - 2) \right) = 2\pi v - 2\pi e + 2\pi f.$$

由此得出 Euler 定理．

1811 年法国数学家 A.-L. Cauchy 给了另一个证明 [Cau]．他先对多边形的网证明 $v-e+f=1$．然后当从多面体中删去一个面后，其面数变成 $f-1$，运用上面公式即得到 Euler 定理．值得强调的是，Cauchy 在这篇文章中还推广了 Euler 定理，证明了 $v-e+f-r=1$，其中 r 是立体之数目．后来于 1855 年被 L. Schläfli 推广到 n 维情形 [Schl]．

以上的讨论限于组合不变性，还未认识到是同胚不变性．

§ 1.5 Gauss 的影响

德国数学家 C. F. Gauss，这位数学王子在几何方面做出过划时代的贡献．他在拓扑学方面虽然没有发表专论著作，但他时常谈到有必要研究图形的基本性质 [G 2; t. 8]，对拓扑学的发展有深刻的影响．

直接影响有以下内容．当他 1799 年证明代数基本定理时就故意提到位置分析，用他的话说，他的推理是“属于对数量的几何学有很多有价值的原理的位置几何（Geometrie der Lage）的”．此后，Gauss 在 1802 年 11 月 21 日给 Olber 的信 [G 2; t. 8, 103]，1825 年 10 月 30 日给 Schumacher 的信 [G 2; t. 5, 400] 以及 S. von Waltershausen 为他所写传记 [Walt; 88] 中，都一再提到位置几何（geometria situs），Gauss 还鼓励 Listing 写了涉及位置分析的书．

Gauss的研究与拓扑学有关联的应提到以下方面．Gauss在1827年著名的文章《关于曲面的一般研究》［G 1］中，对于曲面上一个由测地线构成的三角形 A，证明了一条关于曲率的著名定理．设 K 是该曲面的总曲率，于是

$$\iint_A K\mathrm{d}A = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \pi,$$

其中 α_1，α_2，α_3 为该三角形之三内角．表面上这个定理与拓扑学无关，但它很容易与Euler定理挂钩．这定理1848年被P. O. Bonnet推广［Bon］为Gauss-Bonnet公式：在可定向曲面 S 上给定一个区域 D，则有

$$\Sigma\theta_i + \int_{\partial D} k_g \mathrm{d}s + \iint_D K\mathrm{d}A = 2\pi\chi(D),$$

其中 $\Sigma\theta_i$ 是边界上所有角点处的外角之和，k_g 是区域边界 ∂D 的曲线的测地曲率，K 是曲面的总曲率，$\chi(D) = v - e + f$，其中 v，e，f 为将 D 分成一些多边形后的顶点数，棱边数和多边形数．Gauss于1833年在电动力学［G 3］中用线积分定义了空间两条封闭曲线的环绕数，后被英国物理学家J. C. Maxwell在他的名著《电磁学》中引用［Max；43］．

§ 1.6　Listing与Möbius的贡献

德国人Listing和A. F. Möbius都与Gauss有交往．Listing 1832年起当过Gauss的学生，他发明了拓扑学一词，他在现存于哥廷根大学图书馆的写于1836年的一封信中说，Gauss鼓励他研究被称为位置分析的学科，并且他说他称之为拓扑学．他还说，“拓扑学的定义是场所的关系的定性的规律之研究”［Pont；42］．Listing在1847年出版了《拓扑学的初步研究（Vorstudien

zur Topologie)》[Lis 1]，1862 年发表了另一著作《空间复形的概述（Der Census räumlicher Complexe)》[Lis 2]，进行了拓扑学的研究．据 M. Kline [Kli] 说，“其实他认为宁愿用位置的几何这个名称，但他未用，因为 von Staudt 已经把射影几何叫做位置几何了.”

Möbius 是另一位受过 Gauss 影响的人，他于 1813 年当过 Gauss 的助教．他是对拓扑学研究的本性给出恰当提法的第一人．他在 1863 年出版的《初等关系的理论（Theorie der elementaren Verwandschaft)》[Mo] 里考虑了两个图形，它们的点形成一一对应，并在此对应之下邻近的点对应着邻近的点．他建议研究这样联系着的两个图形之间的关系．

Listing 和 Möbius 在 1858 年各自独立地发现了单侧曲面，其中最闻名的是 Möbius 带．单侧或双侧性的说法依赖于放在 3 维空间中来看一个曲面，现在被可定向性这个更精确的说法所取代．按可定向与否，曲面被分成了不同的两大类．

§1.7 Riemann 的贡献

Riemann 是继 Gauss 之后最伟大的数学家，他也是 Gauss 事业的承继者．他并未发表有关拓扑学的系统的研究，但是在他有关 Riemann 曲面的研究中做出了 Euler 以后的最重要的推动．这些内容主要包含在他的 1851 年的博士论文 [Rie 1] 及 1857 年的《Abel 函数的理论》[Rie 2] 中．Riemann 创造性地引进了 Riemann 曲面概念以给多值函数单值化．他发现有必要引进 Riemann 曲面的连通性．其连通性定义如下：“如果在曲面 F 上能画出 n 条闭曲线 a_1，a_2，…，a_n，它们各自单独地或集体地都不能包围曲面 F 的一部分，但是它们连同任意另外一条闭曲线

就能包围，该曲面就说是其连通阶为 $n+1$.” 当 F 是有边曲面时，闭曲线可换成起点和终点都在边缘上的横截曲线．球面和圆盘都是 1 连通的，通常称为单连通的；环面则是 3 连通的，等等．这个说法至今沿用下来，特别在分析教材中用以界定一个平面区域的单或多连通性．

Riemann 的曲面连通性阶是一个重要的拓扑不变量，他自己当时已经认识到这点．其等价的说法是曲面的亏格，如果曲面亏格是 p，则连通阶为 $2p+1$．注意，Riemann 曲面都是可定向的．

Riemann 断言：如果两个闭 Riemann 曲面拓扑等价，它们就具有相同的亏格．他还看出，所有亏格为零的闭的代数曲面都拓扑地（保角地并且双有理地）等价，且都能拓扑地映射成球面．接着他建立了著名的 Riemann-Roch 定理（参考第二十一章）．

后来，英国人 W. K. Clifford 于 1877 年［Cl］用有洞的球面来表示 Riemann 曲面．德国人 F. Klein 于 1882 年［Kle］提出用安了若干个环柄的球面来作为 Riemann 曲面的模型．这样，实际上就完成了可定向闭曲面的拓扑分类．

Klein 在 1882 年还引进了不可定向的闭曲面 Klein 瓶，开始了不可定向闭曲面拓扑分类的研究［Kle］，W. Dyck［Dy］于 1888 年完成．

组合的曲面分类首见于 1907 年的［De-H］．

§1.8 Betti 的贡献

意大利著名的数学家 E. Betti 是比萨大学的数学教授．据 M. Kline［Kli］说，Betti 当 Riemann 因为健康原因在意大利度过几个冬季时，曾见到过 Riemann，并直接从 Riemann 处得知 Riemann 的工作．他进而认识到研究图形的更高维的连通性的必

要性．他在 1871 年［Bet］引进了从 1 到 $n-1$ 维连通数．若几何图形上能画若干条闭曲线，而它们一起不成为这图形中某个二维曲面的边缘，这种闭曲线的最多条数称为该图形的一维连通数．若在图形上能作若干个闭曲面，而它们一起不成为这图形中某个三维区域的边缘，这种闭曲面的最大数称为该图形的二维连通数．更高维数的连通数有相仿的定义．

Betti 的推广很重要，不过请注意，Betti 的一维连通数比 Riemann 关于曲面的连通阶数目上少 1．

此外，Betti 对于复二维代数簇作为 4 维的图形，证明了一维连通数等于三维连通数，这相当于后来的 Poincaré 对偶定理．

§1.9 四色问题

地图上色问题是英国数学家 Francis Guthrie 在 1852 年提出的一个猜测：四种颜色足矣！他的弟弟 Frederick 把这个猜测转告 A．De Morgan．A．Cayley 在 1879 年的文章［Cay］中承认他不能证明．在这以前和以后陆续有人提出过“证明”，甚至发表了，但都被发现是错误的．甚至有人说，例如 H．Whitney［Why 16］，“每个伟大的数学家都曾研究过这个问题，并且在某个时刻认为他已经证明了该定理”．当然，还有流传的故事说，某伟大的数学家因小瞧了四色问题而当众挂黑板等等．总之，这是一个说起来人人可以听得懂，但困难得使伟人们也会碰壁的拓扑学难题．到 1976 年已获得一个利用计算机辅助的证明［Ap-H］．不用计算机辅助的推理证明至今尚未获得．

§ 1.10 Jordan 曲线定理

法国人 C. Jordan 在他 1887 年出版的著名教材《分析教程(Cours d'analyse)》[Jo] 中提出了平面上的现在称为 Jordan 曲线的概念，并且陈述了一个定理，通称 Jordan 曲线定理：平面上的 Jordan 闭曲线把平面分成两个部分，同一部分中的两个点均可用完全位于该部分的折线连接. Jordan 本人提出了证明，但不正确. 许多杰出的数学家也提供了不正确的证明. 直到 1905 年，美国人 O. Veblen 给出了第一个严格的证明 [V 1]. 不过，现今这个定理的恰当的表述应将其中 Jordan 闭曲线换成圆周 S^1 的同胚像，因为“曲线”这个概念在 19 世纪末还是亟待商榷的.

值得提醒的是，这个定理的一再推广正是代数拓扑学发展中的重要闪光点之一.

第二章 Poincaré 时期

一般都认为代数拓扑学和微分拓扑学的正式奠基是由法国人 H. Poincaré 从 19 世纪 90 年代开始. 的确, Poincaré 从 1892 年开始发表了一系列论文 [P 1～7], 其中介绍了同调, Betti 数, 基本群, 挠系数, 单纯复形组合方法, 对偶定理等, 确定了至今为止同调论和同伦论的最基本的概念和理论. 但是, 在 Poincaré 的上述论文中, 基本的结论通常缺乏证明. 事实上, 当时尚未能设计出合式的论证技术以完成严格的证明, 尽管 19 世纪末在数学分析领域中由 K. T. W. Weierstrass 代表的一丝不苟的严格论证的作风, 以及由几何学的公理化而产生的对纯粹数学的逻辑化的深刻认识, 已被数学界普遍认同. 这不能不说是一个令人颇为费解的现象.

当 Poincaré 的第一篇长文 [P 2] 发表后, 丹麦人 P. Heegaard 在 1898 年的学位论文 [He] 中对它提出了批评, 这引起了 Poincaré 继续深入的研究.

§2.1 Poincaré 的第一篇长文

Poincaré 的第一篇拓扑学论文是一篇短文 [P 1], 全集的评注说这是他的第二篇拓扑学的论文 [P 2] 的摘要, 而 [P 2] 是

1895 年发表的一篇长达 121 页的文章，题为 Analysis Situs.

在 Analysis Situs 的前三节中 Poincaré 给出了他研究的空间的定义，那就是某个 $\mathbf{R}^n$ 中由 p 个整体方程和 q 个整体不等式

$$\begin{cases} F_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0, \\ F_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0, \\ \qquad \cdots \\ F_p(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0, \\ \varphi_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)>0, \\ \varphi_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)>0, \\ \qquad \cdots \\ \varphi_q(x_1,x_2,\cdots,x_n)>0 \end{cases} \tag{1}$$

所界定的集合，其中的 F 和 φ 为 C^1 函数并且 F 的 Jacobi 矩阵的秩为 p. 他称这个集合为一个 $n-p$ 维流形. 这个定义是我们今天采用的 C^1 流形的特别情形，因为 C^1 流形可以由局部方程组来界定. 由（1）界定的流形一般来说是带边的，其边缘是（1）中的任一不等式 $\varphi_\alpha>0$ 改成等式 $\varphi_\alpha=0$，$1\leqslant\alpha\leqslant q$，所界定的集合之并，他称之为（1）所界定的流形的“完全边缘”.

接着他定义了两个流形之间的同胚，就是我们今天的 C^1 微分同胚，并说两个同胚的流形从拓扑学观点看是等价的，即看成一样的.

为了定义流形的定向，他认为若流形 V 由（1）界定，则当（1）之诸 F_α 中任何两个对调后，则所界定的流形是 V 的“相反流形”. 从而规定由（1）界定的 V 的定向. 同时若其边缘的一部分 v 由（1）中诸 $F_\alpha=0$ 及某 $\varphi_\gamma=0$ 和 $\varphi_\beta>0$（$\beta\neq r$）所界定，则 v 之定向由 F_α 及 φ_r 之顺序规定. 用现在的说法，v 之定向为由 V 之定向诱导的定向.

然后他引进了重要的概念“同调”. 类似于 Riemann 和 Betti，Poincaré 考虑一个给定的 p 维流形 W 中的一组 $q-1$ 维无边

子流形 v_1, v_2, $\cdots$, v_λ $(q \leqslant p)$,如果它们的并组成 W 中一个连通的 q 维子流形 V 的"完全边缘",则将此事实约定表为

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_\lambda \sim 0, \tag{2}$$

称此关系为 v_1, v_2, $\cdots$, v_λ 之间的一个"同调". 他紧跟着写下了 (2) 式的推广, 如

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 \sim k_3 v_3 + k_4 v_4,$$

其中 k_1, k_2, k_3, k_4 为整数, 而 v_1, v_2, v_3, v_4 为 W 中 $q-1$ 维子流形, 表示 W 中存在一个 q 维子流形 V, 其"完全边缘"由 k_1 个稍有不同的 v_1, k_2 个稍有不同的 v_2, k_3 个稍有不同的 v_3 的"相反流形"以及 k_4 个稍有不同的 v_4 的"相反流形"所组成. 接着他声称:"同调可如通常的等式一样被组合". 这就是说同调关系式可以作加法和减法, 从而一般来说如下的同调关系式

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + \cdots + k_\lambda v_\lambda \sim 0 \tag{3}$$

是有明确意义的, 其中 k_1, k_2, $\cdots$, k_λ 为任何正的或负的整数, v_1, v_2, $\cdots$, v_λ 为 W 中 $q-1$ 维子流形. 他甚至在例子中用到下述法则: 对任意整数 $c \neq 0$, 同调 $\Sigma_j k_j v_j \sim 0$ 与 $\Sigma_j c k_j v_j \sim 0$ 等价.

这里有三点不够清楚. 第一, 当 k 为正整数, v 为 W 的 $q-1$维子流形时, k 个稍微不同的 v 是什么意思? 也许应当指由 v 通过"很小的形变"(按我们今天的看法是同痕) 而得 v 的 k 个相互不同的拷贝. 但是, 难道能够保证它们相互不相交吗? 现在我们知道, 这是不能保证的.

第二, 当将两个同调作加法时, 他忽视了下面一个绝非平凡的困难. 设给了 q 维子流形 V 和 V' 分别各实现一个同调, 如何得知必有一个 q 维子流形其"完全边缘"恰好是 V 的"完全边缘"与 V' 的"完全边缘"之并? 设想将 $V \cup V'$ 拿来一般是不行的, 因为 V 与 V' 可能有公共部分, 而且可能很复杂, 从而 $V \cup V'$ 并不是一个 q 维子流形.

第三, 法则: 对 $c \neq 0$, 同调 $\Sigma_j k_j v_j \sim 0$ 与同调 $\Sigma_j c k_j v_j \sim 0$ 等

价是不能证明的．这其实是一个错误的结论，挠系数将由此而产生．这将在§2.2中谈到．

紧接着Poincaré定义Betti数如下．设V是一个n维流形，他对于$1\leqslant q\leqslant n-1$定义$V$的$q$维Betti数$P_q$为在$V$中存在其最大数目为$P_q-1$个紧的连通的$q$维无边子流形它们是“独立的”，即不存在系数不全为0的同调．他并且认为这些数P_1，P_2，…，P_{n-1}就是Betti用过的“连通数”．随即他举了几个例子，写下了它们的Betti数．

在接下来的一节中，Poincaré转向n维流形中的微分p形式$(1\leqslant p\leqslant n-1)$的积分．此前，Riemann对$n=2$的情形，Betti对一般的$n$和$p=1$及$n-1$的情形得到1形式和$n-1$形式的积分的周期与Betti数之间的关系．虽然那时尚未引进外微分算子d，但Poincaré用可积性条件来表述一个p形式ω是闭的，相当于在现今的记号下$d\omega=0$．这种形式在紧的无边p维子流形上的积分称为周期，他断言周期均为某P_p-1个周期的有理系数的线性组合．这是走向de Rham定理的第一步，法国人E．Cartan 30年以后回到这个问题，最后导致瑞士人G．de Rham的重大成就，这同时也是上同调的萌芽（参见§10.4）．

Poincaré在第9节中提出有关流形同调论的最重要成果，著名的对偶定理：对于紧的连通的可定向的无边n维流形，当$1\leqslant p\leqslant n-1$时有$P_p=P_{n-p}$．在这个定理陈述之后，他说到这个定理已被一些数学家所知晓并应用，但他未谈到他们的名字．经查阅文献，可知Betti是其中之一（参见§1.8）．现今都称这个定理为Poincaré对偶定理．在证明中Poincaré引进了一个重要的新概念．对于在一个有向的n维流形U中分别为p和$n-p$维的两个有向的子流形V_1和V_2，若M是V_1与V_2的一个公共点且V_1和V_2在点M的切空间仅相交于一点，则称V_1和V_2在点M横截相交；这时Poincaré定义相交数$S(M)$为$+1$或-1，视V_1和V_2在点M之定向按顺序组成U在点M之定向与否，这

里关于定向的表述是用到显式表示流形的函数的雅可比行列式的符号. 然后，设 V_1 与 V_2 只在有限个点 M_1，M_2，…，M_m 处横截相交，他记 $N(V_1,V_2)=\sum_{i=1}^{m}S(M_i)$. 他希望证明在有向的 n 维流形 U 中的若干个有向的紧的无边的连通的 q 维子流形 v_1，v_2，…，v_λ 之间的一个"同调"等价于这样一个事实，对于 U 中的任意有向的 $(n-q)$ 维的与每个 v_j 只横截相交于有限个点的子流形 V 而言有

$$\sum_{j=1}^{\lambda}N(V,v_j)=0.$$

由此不难推出 $P_{n-q}\leqslant P_q$，再调换 q 与 $n-q$ 之地位，得等式 $P_{n-q}=P_q$，即得对偶定理.

Poincaré 关于上述充要条件在 $q=n-1$ 的情形的证明至少当 v_j 都不同时看来是对的，一般情形他并未考虑. 但是，当 $1<q<n-1$ 时他的证明企图是不可信的. 它假设存在一个光滑的 $(q+1)$ 维子流形 W 包含所有的 v_j，考虑交集 $V'=V\cap W$ 所成之一维子流形，并将 $q=n-1$ 时的结果应用其上. 正如后来 Heegaard 指出的，即使承认存在那样的 W，尚须证明 W 中的每条曲线 V' 均形如 $V'=V\cap W$ 对某个 $(n-q)$ 维子流形 V 成立.

在 Analysis Situs 中另一个重要不变量是基本群（第 12 节）. 虽然空间是连通的流形，但基本群的定义与我们现在采用的本质上一样. 设 X 为一连通流形，取定一点 $a\in X$. 以 a 为起点和终点的道路称为环路；两条以 a 为起点的环路 α 和 β 合成一个环路 $\alpha\beta$ 为先沿 α 走再沿 β 走；环路 α 之逆 α^{-1} 为沿 α 之反方向走. 两条以 a 为起点的环路称为等价的，如果它们可以互相"形变"；然后，Poincaré 称以 a 为起点的环路的等价类按合成所成的群为 X 在点 a 的基本群，采用现在的记号记作 $\pi(X,a)$ 或者 $\pi_1(X,a)$. Poincaré 还证明了若 $b\in X$ 是另一取定的点，ω 是以 a 为起点 b 为终点的道路，则对以 b 为起点的环路 α，对应以 a 为

起点的环路$\omega\alpha\omega^{-1}$，可定义一个映$\pi_1(X,b)$成$\pi_1(X,a)$的同构，从而可以将$\pi_1(X,a)$写成$\pi_1(X)$而不指明点a.

在第三个补充［P 5］中Poincaré对X是一个特殊代数曲面时决定了$\pi_1(X)$. 而在第五个补充［P 7］中他运用了基本群构作了一个著名的三维流形，一个紧的无边的三维流形具有与三维球面一样的同调而具有非平凡的基本群.

Poincaré还指出下面的事实. 在一个基本群$\pi_1(X)$中，若在有一个公共点的闭曲线$c_j(1\leqslant j\leqslant m)$的类$s_j$之间有关系

$$s_1^{\alpha_1}s_2^{\alpha_2}\cdots s_m^{\alpha_m}=Id,$$

其中α_j为正的或负的整数，则此关系给出了c_j之间的一个"同调"

$$\alpha_1c_1+\alpha_2c_2+\cdots+\alpha_mc_m\sim 0.$$

Poincaré未加证明地陈述了所有一维的"同调"均可以如此得到. 这个想法的精确叙述是下述关于基本群与后来采用的一维同调群之间关系的重要定理：基本群$\pi_1(X)$的阿贝尔化同构于一维同调群$H_1(X;\mathbf{Z})$. 其证明可在现行标准的教科书上找到，例如对局部有限单纯复形可参考［Se-T 2；177～179］，对奇异同调可参考［Gr-H；63～66］或［陈；180～182］.

Poincaré已经知道，两个流形具有相同的Betti数不能保证它们同胚，然后提出了两个有趣的问题：

1. 是否存在两个不同胚的流形，具有相同的Betti数和相同的基本群？

2. 给了任意群G，是否存在流形以G为其基本群？

在第15节中Poincaré研究了二维球面S^2作为实射影平面$\mathbf{R}P^2$的二层复叠空间，他用了G. Veronese的映射$S^2\to\mathbf{R}^6:(x,y,z)\mapsto(x^2,y^2,z^2,xy,yz,zx)$，得到$\mathbf{R}^6$中一个紧的无边的二维子流形，并且断言它是"单侧的"，即不可定向的. 他还研究了两个球面之乘积空间$W=S^{q-1}\times S^{q-1}$到$\mathbf{R}^n$之映射，其中$q\geqslant 2$，而$n=q(q+3)/2$.

最后三节 Poincaré 转向推广 Euler 定理．Euler 定理说：对一个球面状的多面体而言，v 表其顶点数，e 表其棱数，f 表其面数，则有关系式

$$v-e+f=2. \tag{4}$$

在这以前 Schläfli [Schl] 及其他若干数学家都尝试过将 Euler 定理推广到 n 维，但均限于考虑凸多面体．将（4）式的左端换成交错和

$$\alpha_{n-1}-\alpha_{n-2}+\alpha_{n-3}-\cdots+(-1)^{n-1}\alpha_0, \tag{5}$$

其中 α_i 为多面体的 i 维面的数目．Poincaré 发现这个定理应当是一个纯拓扑学的结论，并且应当对于任意 n 维流形成立．于是 Poincaré 采用了剖分的办法来表述流形．设 W 是一个 n 维流形，V 是 W 中的一个 p 维子流形．V 是有限个互不相交的"胞腔"所成的族 T 之并，这些胞腔的维数 $\leqslant p$，每个 j 维胞腔 c 是 W 的某个 j 维子流形 U 的一个开子集使得 c 在 U 中的闭包 $\bar{c}$ 在 U 中有一个开邻域 c' 同胚于 $\mathbf{R}^j$ 中的一个开子集，使之将 $\bar{c}$ 映成一个闭球体而将 c 映成其内部，并且 c 在 U 中之边界 $\bar{c}\setminus c$ 是 T 中一些 k 维胞腔之并，$k\leqslant j-1$．按后来德国数学家 H. Weyl 在 [Wey 1] 中的术语，我们称这种 T 为 V 的一个三角剖分．Poincaré 注意到 T 中每个 $(p-1)$ 维胞腔恰为 T 中两个 p 维胞腔之面．记 α_j 为 T 中 j 维胞腔数，他想证明交错和

$$\alpha_p-\alpha_{p-1}+\alpha_{p-2}-\cdots+(-1)^p\alpha_0 \tag{6}$$

只依赖于 V 而不依赖于 T．

Poincaré 首先做了如下尝试．假设 V 有两个三角剖分 T 和 T'，令 T'' 为 T 中胞腔与 T' 中胞腔的交集所成之族，它想必是 V 的另一个三角剖分．只需证明从 T'' 过渡到 T 或 T' 时，和数（6）不变即可．然而他很快发现 T 中一个胞腔与 T' 中一个胞腔之交集或其连通分支不必是一个胞腔．因此这条看来前途光明的大道遇到了巨大的困难．当然人们是不死心的，以至后来在 1908 年德国人 Steinitz [Stei] 提出了著名的猜测 Hauptvermutung（主猜

测），认为两个同胚的流形的三角剖分必有公共的加细剖分，或者说同胚的流形必组合同胚. 同时将主猜测推广到对复形的情形，这引起了几十年的关注. 对于二维的流形，即曲面，由分类定理的证明得知主猜测是成立的，见 [Stil; 183]. 对于三维流形，E. Moise 于 1952 年 [Moi 1] 证明主猜测是成立的，可参见 [Moi 2; 253]. 对维数≥5，J. Milnor 于 1961 年证明主猜测对 6 维复形是不成立的 [Mi 8]. 而对维数≥5 的流形，迟至 1969 年由 R. Kirby 及 L. Siebenmann 证明主猜测也是不成立的 [Ki-S]. 详情请参考 §23.1 和 §23.4.

为避免这个困难，Poincaré 尝试了另外一个方法. 设 V 包含于某 $\mathbf{R}^N$，T 和 T' 是 V 的两个三角剖分，其中 T' 由 V 与 $\mathbf{R}^N$ 的某个“三角剖分”相交而成，而 $\mathbf{R}^N$ 的这个“三角剖分”的 N 维胞腔都是当 δ 充分小时超平面 $x_j = k\delta$ ($1 \leqslant j \leqslant N$，$k = 0$，$\pm 1$，$\pm 2$，$\cdots$) 的并集之余集的连通分支. 然后比较 T 与 T'. 但这也是注定不会成功的，因为一个 C^1 甚至于 C^∞ 流形与一个线簇相交可以出现非常病态的结果，对此 Poincaré 当时可能并未认识到. 如果置这个严重的不可克服的困难于不顾，而来看 Poincaré 后面的推理，那还是很精彩的：网格的细度 δ 充分小时，允许他假设 T 的胞腔中那些位于 T' 的 p 维胞腔的内部的点属于 T 的某个单个 q 维胞腔 v_q 的“星形”. 于是他能对 p 运用归纳法. 这个想法正是后来荷兰人 L. E. Brouwer 和美国人 W. Alexander 的正确的证明赖以置根的有关胞腔的“充分小的重分”这一想法的先驱.

Poincaré 采用的第三个办法是不仅证明 (6) 与三角剖分无关，而且将它用 Betti 数表出，即现今所说的“Euler-Poincaré 示性数”

$$\begin{cases} 3 - P_1 + P_2 - \cdots - P_{p-1} & \text{当 } p \text{ 为偶,} \\ P_{p-1} - P_{p-2} + \cdots + P_2 - P_1 & \text{当 } p \text{ 为奇.} \end{cases} \tag{7}$$

实际上，他只考虑了 $p = 2$ 和 3 的情形. 当 $p = 2$ 时，他的想法

是足够清晰的．在 $p=3$ 时，他又遇到了 C^{∞} 流形相交后会得到病态结果的困难．因此这个情形的证明其实是失效的．现在，当我们采用了三角剖分和用群的语言来表述“同调”时，可以容易地推得（6）式=（7）式，并且对于任一复形也成立．当 Betti 数或同调群的拓扑不变性获得证明后，大家不难认识到，Poincaré 推广的这个定理具有极为深刻的意义．

以上就是 Poincaré 的有关拓扑学的第一篇长文 Analysis Situs [P 2] 的主要内容．这篇文章因其极为丰富的构想而使人着迷，同时亦因其中几乎所有重要结论都缺乏证明，或其证明思路不够严密，或其思路将因不可克服之困难而失败，从而令一些人感到愤怒．这两方面共同决定了它设置了此后 30 年甚至更长时期的拓扑学的发展的大部分芽胚，并影响到 60 年以后的发展．

§2.2　Heegaard 的批评与 Poincaré 的几篇补充

丹麦数学家 Heegaard 于 1898 年发表了他的学位论文 Forstudier til en topologisk teori för de algebraiske Sammenhäng, Copenhague, det Nordiske Forlag Ernst Bojesen, 1898，后来被译为法文再次发表为 Sur l'Analysis Situs, Bull. Soc. Math. France, 44 (1916), 161～242 [He]．Heegaard 在这篇文章中引进了 Heegaard 分解，这是三维拓扑学的基本工具之一；也许更为重要的是他向 Poincaré 提出了质疑，因为他看出了 Poincaré 文章中的瑕疵．关于不相同的紧的连通的子流形 $v_1, v_2, \cdots, v_k$ 之间的一个“同调”，他指出有可能 v_j 之间具有非空的交集，这显然对“同调”的实现是一个困难．Heegaard 还举了一个 3 维可定向流形的例子：$\mathbf{C}^3$ 中锥 $z^2=xy$ 与柱面 $|x^2|+|y^2|=1$ 的交集，他断言其 Betti 数为 $P_1=2$，$P_2=1$，这与 Poincaré 的对偶定

理相矛盾. 后者引起了 Poincaré 的极大重视. 经过检验, Poincaré 发现他在 Analysis Situs 中所采用的"Betti 数"的定义当时以为同 Riemann 和 Betti 采用的"连通数"一样. 实际上 Betti 的一维连通数等于 Riemann 的连通数减去 1. 而 Betti 采用的"连通数"定义为:第 q 个(维)连通数是不同的 q 维紧连通的子流形 $v_1, v_2, \cdots, v_\lambda$ 使得它们的并集不是一个$(q+1)$维子流形的边缘的最大的 λ. 但是这并不排除这样一种可能,存在整数 $m_1, m_2, \cdots, m_\lambda$ 使得 $m_1 v_1 + m_2 v_2 + \cdots + m_\lambda v_\lambda$ 是一个边缘. 例如在 $\mathbf{R}P^3$ 中 $\mathbf{R}P^1$ 并不是一个边缘, 但 $2\mathbf{R}P^1$ 则是一个边缘.

Poincaré 必须承认他原先证明对偶定理的做法是完全不合适的. 很可能他知道他的推理没法修补, 但他迎着挑战并发现他在第一篇长文 Analysis Situs 中只在最后研究 Euler 公式时创立的技术能够导致有关同调全新的概念. 他分别在 1899 年和 1900 年发表了他的第一个补充 [P 3] 和第二个补充 [P 4], 从而奠定了"组合拓扑学"的基础.

Poincaré 在第一个补充的节 I 中介绍了 Heegaard 的批评; 在节 II 中, 先规定了一个有向的 p 维流形与它边缘中的一个 $(p-1)$ 维有向的流形两者的定向是正向相关还是反向相关, 然后给了紧连通的流形一个三角剖分 T, T 的每个胞腔都选择了一个定向, 他对 T 的任意一个 q 维胞腔 a_i^q 和任意一个 $(q-1)$ 维胞腔 a_j^{q-1} 定义了一个数 ε_{ij}^q, 等于 0 如果 a_j^{q-1} 不含于 a_i^q 的边界内, 等于 +1 如果 a_j^{q-1} 含于 a_i^q 的边界内并且定向正向相关, 等于 −1 如果 a_j^{q-1} 含于 a_i^q 的边界内并且定向反向相关.

他继续采用 Analysis Situs 中的术语, 称整系数 λ_i 的线性组合

$$\sum_i \lambda_i a_i^q \tag{8}$$

为一个"流形"并称线性组合

$$\sum_{i,j} \lambda_i \varepsilon_{ij}^q a_j^{q-1} \tag{9}$$

为组成（8）的“完全边缘”的“流形组”．事实上，一旦 ε_{ij}^{q} 被取定，从（8）得（9）则是纯粹代数的．现今线性组合（8）称为一个链，同时（9）称为链（8）的边缘．这里提醒不熟悉的读者，边缘一词是一个代数的概念，边界一词是一个一般拓扑的概念，V 的子集 A 的边界 $Fr(A)$ 指 V 中子集 $\bar{A}\cap(\overline{V\setminus A})$，两者不可混淆．

Poincaré 证明了一个链的边缘是 0．然后，他模仿 Analysis Situs 中的定义，称链 $\sum_i \lambda_i a_i^q$ 是闭的，如果其边缘是 0；并且如果链 $\sum_i \lambda_i a_i^q$ 是一个（$q+1$）维链的边缘，则写下一个“同调”

$$\sum_i \lambda_i a_i^q \sim 0. \tag{10}$$

他在节 III 中定义“约化 Betti 数” P_q' 为最大的数，使得存在（$P_q'-1$）个闭链，它们的不全为 0 的系数的线性组合不能用一个同调联系．他记 T 中 q 维胞腔数为 α_q，并引进两个新的数 α_q' 和 α_q''：$\alpha_q-\alpha_q''$ 和 $\alpha_q-\alpha_q'$ 分别是闭 q 维链和（$q+1$）维链的边缘在有理数域上的向量空间的维数；因此 $P_q'-1=\alpha_q'-\alpha_q''$ 并且 $\alpha_q''=\alpha_{q-1}-\alpha_{q-1}'$．从这些关系立即推得 Euler-Poincaré 公式

$$\begin{aligned}&\alpha_n-\alpha_{n-1}+\cdots+(-1)^n\alpha_0\\&=1-(P_{n-1}'-1)+\cdots+(-1)^n(P_1'-1)+(-1)^n.\end{aligned} \tag{11}$$

Poincaré 在第一个补充［P 3］中的主要目的是给对偶定理一个新的证明．

在节 IV～VI 中他打算证明他的“约化 Betti 数”与他在 Analysis Situs 中的“Betti 数”是一样的．为此目的他必须证明：(A) V 中任意紧的连通的 q 维子流形 v 按 Analysis Situs 中的意义同调于 T 中一个 q 维链；(B) 节 III 中 α_q'' 个“同调”线性表示所有的 q 维链“同调”．命题（A）的证明是建立在有病态的流形相交技术之上的．关于命题（B）在特殊情形 $n=4$，$q=1$ 所做的证明也很不严格，并且不能推广到一般情形．不过有一段

从一个三角剖分到其加细之间的过渡写得很精彩.

在最后的节 XI 中，Poincaré 企图证明解析流形的三角剖分的存在性. 他打算对流形的维数进行归纳. 这个想法后来被荷兰人 B. L. van der Waerden [W 2] 和美国人 S. Lefschetz 及英国人 J. H. C. Whitehead [Le-W] 发展来证明代数簇的可三角剖分性. 但 Poincaré 假设解析流形 V 存在一个由区图的区域之闭包组成的覆盖，任何两个这种区域都无公共点并且任何区域都在 V 中有分片解析的边界. 这个要求的确太不显然了.

重要的是 Poincaré 在第一个补充和第二个补充中创立了组合拓扑学的几个最重要的概念：单纯重分（利用重心方法），对偶三角剖分（他称为互反的）和关联矩阵. 现今这些都是单纯同调论的基本概念. Poincaré 利用这些概念对"约化 Betti 数"的对偶定理在第一个补充里给了一个不完善的证明，而在第二个补充里给出了一个最终的证明. 这是有关同调概念的决定性的步骤.

Poincaré 还注意到虽然闭链 z 不是一个边缘，但对于某个整数 $c>1$ 来说 $cz\sim 0$ 是可能的. 这导致他给出挠系数概念. 他可能相信挠系数与三角剖分无关，但他并未企图证明.

Poincaré 还在第二个补充中引进了联积（join）概念，后来被许多人应用.

Poincaré 在第二个补充的最后还提出了所谓的"Poincaré 猜测"的错误版本：一个紧的无边的连通的可定向的 n 维流形 V，若与 n 维球面 S^n 的 Betti 数和挠系数都一样，则与 S^n 同胚. 这是 1900 年的事. 四年后他自己在第五个补充 [P 7] 中举出了一个三维的反例，其基本群不是平凡的. 这个反例很重要，现今称为 Poincaré 流形，见 §25.1 或 [Rol; 245]. Poincaré 在这个补充中重新对三维流形提出猜测：若一个紧的无边的连通的三维流形的基本群平凡，则它同胚于三维球面 S^3. 这个猜测是现代数学中最著名的猜测之一，至今尚未解决.

Poincaré 还有两篇补充. 第三个补充决定了由方程

$$z^2 = F(x, y)$$

界定的代数簇的基本群，其中 x，y，z 为复变量．第四个补充论及某些代数曲面的 Betti 数．此处不介绍了．

第三章 Brouwer 与组合拓扑学

L. E. J. Brouwer 是荷兰人，原来从事几何和力学的研究，1909 年开始对拓扑学有了兴趣. 他先做 Hilbert 第 5 问题，并证明了实数直线上的 C^0 变换群都是 Lie 群. 进一步他企图研究 $\mathbf{R}^2$ 上的变换群，这导致他研究平面集合的拓扑学. 他先列举反例发表在 1910 年 [Br 7; 352～366]，其中最出人意料的是平面中的一个“不可分解的”紧的连通的集合，它是该集合的余集的三个连通分支之边界，此例立即赢得了国际上的承认. 接着他引进了单纯逼近这个新概念，并熟练地运用而获得巨大的突破. Brouwer 于 1910 至 1912 年间的文章中相继发表了若干个 Brouwer 定理，而使他一举成名. 他对任意 n，解决了 n 维空间上的一批前人看来无法下手的问题：$\mathbf{R}^n$ 中开集的维数不变性，区域的不变性，Jordan 曲线定理在 n 维的推广，连续映射不动点的存在性，向量场的奇点，映射度以及任意紧度量空间维数概念的定义.

回溯历史，有理由认为 Brouwer 与 Poincaré 共同创建了单纯组合拓扑学. 或者更确切地说，Poincaré 确定了组合拓扑学的对象，包括引进了一批基本定义并罗列了一系列有待严格证明的重要定理，而 Brouwer 则设计了方法，运用它除获得一批自己的定理外，上述 Poincaré 的诸定理也得以证明.

但令人惊奇而不解的是 Brouwer 本人并未企图运用他自己的方法去证明 Poincaré 提出的定理，也从未提到 Poincaré 的论文.

这是一个历史性的不解之谜. 以至运用 Brouwer 的方法来证明 Poincaré 的定理，是若干年后由 Alexander 和 Veblen 等人逐步完成的.

§ 3.1 映射度

Brouwer 于 1910 年引进映射度 [Br 2]，并用它来证明所有他得到的重要定理. 这个概念并不是全新的，历史上曾用其他方式出现过.

设 M 和 M' 是两个紧的连通的有向的 n 维流形，T 和 T' 分别是它们的三角剖分. 不失一般性，假设它们都是欧氏单纯复形.

设 ε 是一个小于 T' 的任意 n 单形的直径的正数. 设 K^0 是 T 的全体顶点所成之集合，而 r_0 是从 K^0 到 M' 的映射，使得对 T 之任意 n 维单形，它的全部顶点集在 r_0 之下的像的直径是小于 $\varepsilon/2$. 对于 T 中的任意 n 维单形 s，满足其顶点在 r_0 之下的像都含于 T' 的一个 n 维单形 E 的内部，我们定义 r 为从 s 到 E 中的仿射映射在 s 的顶点上与 r_0 一致. 我们先假设对于 T 的任意 n 维单形 s，当 r 有定义时，$r(s)$ 是不退化的.

设 E 是 T' 中任意 n 维单形，J 是 E 关于 E 的重心的位似 (homothetic) 像，其伸缩比为 <1，并使得 J 到 E 的边缘之距离 $>\varepsilon$. 设 Ω 是 J 的不属于 T 之任意 p 维单形 ($p\leqslant n-2$) 在 r 之下的像中的内点之集合. 可见 Ω 是一个开的连通集.

对于 Ω 中任意不属于 T 之任意 ($n-1$) 维单形在 r 之下的像中的点 P，设 $p\geqslant 0$ 及 $q\geqslant 0$ 分别为 T 中 n 维单形之数，使 r 有定义且 r 保定向或反定向地而 P 在其像之中. 重要结论是 $p-q$ 是与点 P 在 Ω 中之选取无关.

为证此，Brouwer 考虑用 Ω 中一条折线 L 连结的两点 P_1，P_2，让点 P 从 P_1 沿 L 变到 P_2. 数 $p-q$ 仅当点 P 跨越 T 的一个 $(n-1)$ 维单形 t 在 r 之下的像时才可能变化. 但按照设 t 恰为 T 中两个 n 维单形 s'，s'' 之面. 于是当点 P 沿 L 跨过 $r(t)$ 后，或者 p 和 q 增加相同之数，或者减少相同之数.

然后，Brouwer 取消对 T 中任意 n 维单形 s，$r(s)$ 是不退化的假定. 设 β_0：$K^0 \to M'$ 满足 r_0 的相同条件，除了 $\beta(s)$ 非退化. 若 $P \in J$ 是位于 $\beta(s)$ 而不属于 T 之任意 $(n-1)$ 维单形在 β 之下的像中，则 $\beta(s)$ 当然不退化. 数 p 和 q 照样可定义，$p-q$ 也是与点 P 之在 Ω 中的选取无关.

Brouwer 记此常数为 $c(\beta, E)$. 接着证明它与 T' 中单形 E 之选取无关. 于是可记作 $c(\beta)$.

设 M 和 M' 的三角剖分 T 和 T' 已给定，α：$M \to M'$ 是一个连续映射. 对于任意的 $\varepsilon > 0$，可将 T 换成其某个单纯重分 T_ε，使得将 T_ε 的顶点集 K_ε^0 映入 M' 的映射 $\beta_0^\varepsilon = \alpha \mid K_\varepsilon^0$ 满足上述条件，而得 α 的一个逼近 β^ε，从而可定义 $c(\beta^\varepsilon)$. 余下要证，当 $\varepsilon \to 0$ 时 $c(\beta^\varepsilon)$ 与 T_ε 之选取无关. 先证，若 T_1，T_2 是 T_ε 的两个重分，其中 T_2 是 T_1 的重分，β_1，β_2 为对应的映射，则有一个伦移 β_t 连接 β_1 和 β_2，故 $c(\beta_1) = c(\beta_2)$. 再证，若 T_1，T_2 是 T_ε 的两个任意的重分，则取 T_1，T_2 的一个公共重分 T_3，因为此处是欧氏单纯复形，T_3 的存在性没有问题. 故 $c(\beta_1) = c(\beta_2)$.

由此可见，可以将 $c(\beta^\varepsilon)$ 定义为映射 α 的映射度 $\deg(\alpha)$，Brouwer 接着证明它是在同伦之下不变的.

Brouwer 还注意到，若 M 是紧的连通的和有向的，而 M' 是紧的连通的但不可定向的，或者 M' 是不紧的，则映射度为 0.

仔细检验将发现，M' 的连通性是必要的，而 M 的连通性则不是必要的. 实际上，在 M 有若干个连通分支的情形，M 到 M' 的一个连续映射 α 的映射度可表成 α 限制在 M 的每个分支 M_j

上的度之和：$\deg(\alpha)=\sum_j \deg(\alpha|M_j)$，即映射度有加法性．这一点 Brouwer 虽然没有明确提到，但他后来用到了．

Brouwer 还猜测映射度不依赖流形 M 和 M' 的三角剖分 T 和 T' 的选取 [Br 7; 463]．而他在后来的文章中 [Br 7; 504～506]，作为映射度的乘法性的推论而证明．设 M，M' 和 M'' 是三个紧的连通的有向的 n 维流形，分别有三角剖分 T，T' 和 T''，而 α：$M\to M'$ 和 α'：$M'\to M''$ 是两个连续映射，则

$$\deg(\alpha'\circ\alpha)=\deg(\alpha')\deg(\alpha).$$

其证明再次用到分片仿射逼近，此处不赘述．一旦乘法性公式成立，设 T_1'，T_2' 为 M' 的两个三角剖分．记 α：$M\to M'$ 为 $\alpha=\varepsilon\circ\alpha$，其中 ε：$M'\to M'$ 为恒等映射．再记 $\deg_1(\alpha)$ 及 $\deg_2(\alpha)$ 分别为关于 T 和 T_1' 以及关于 T 和 T_2' 定义的映射 α 的度，并记 $\deg_{12}(\varepsilon)$ 为映射 ε 关于 T_1' 和 T_2' 的映射度．于是由乘法性得 $\deg_2(\alpha)=\deg_{12}(\varepsilon)\deg_1(\alpha)$．由定义可算出 $\deg_{12}(\varepsilon)=1$，可知 $\deg_2(\alpha)=\deg_1(\alpha)$，即 α 的映射度与 M' 的三角剖分无关．类似的推理可证映射度与 M 的三角剖分无关．

Poincaré 在遇到困难而纠缠不清之后，发明了三角剖分而将问题变成组合问题．但这就把问题的性质改变了．如何证明不变性，这是 Poincaré 完全没有去做的事．不管是什么原因使 Poincaré 未能去做，那时基本的方法尚不具备．Brouwer 用来定义映射度的方法中，核心是利用今天称为单纯逼近的方法．这是 Brouwer 的重大发明，开辟了组合拓扑学严格推理的道路．

§3.2 维数不变性

19 世纪由于多元微积分和解析力学的发展和应用，数学家

们对 $\mathbf{R}^n$ 中的子集已很熟悉．人们心照不宣地认为 $\mathbf{R}^n$ 中的一个点只能用 n 个实数决定．然而在 1877 年德国人 G. Cantor 发现对于任意 n，存在从 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}^n$ 的双射（一对一的对应），这完全出乎人们的意料，并似乎对分析学的基础形成威胁，因为经典的维数概念来自 $\mathbf{R}^n$ 的数 n．德国数学家 J. W. R. Dedekind 注意到 Cantor 的定理中的一一对应是极不连续的，他认为当 $m \neq n$ 时应当不存在从 $\mathbf{R}^m$ 到 $\mathbf{R}^n$ 的双方连续的双射，用现代的语言来说，不存在同胚．当 $m=1$ 而 $n>1$ 时容易证明，因为 $\mathbf{R}$ 可用一个单点来分割而 $\mathbf{R}^n$ 不能．一些数学家在 1910 年前已能解决 $m=2$ 和 $m=3$，$n>m$ 的情形．而 Dedekind 猜测的一般证明，则是在 Brouwer 的一系列拓扑学论文中的第一篇［Br 1］中给出的．此文发表于 1911 年．

Brouwer 的证明用到一个关键的引理：若连续映射：$f:[-1,1]^n \to \mathbf{R}^n$ 对于所有 x 满足 $|f(x)-x|<\frac{1}{2}$，则 $f([-1,1]^n)$包含着方体$\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^n$．这个引理也是用单纯逼近来证明的．

利用这个引理 Brouwer 证明，不存在从$[-1,1]^n$ 到 $\mathbf{R}^n$ 中的一个疏朗子集 C 上的连续单射 g．其证明用到反证法．设这种映射 g 存在，于是可能定义一个连续映射 $h:\ C \to [-1,1]^n$，使得 $h(C)$是疏朗的并且对于所有 $x \in [-1,1]^n$ 有 $|h(g(x))-x|<\frac{1}{2}$，这与引理相矛盾．

现在来构作这样的 h．取一方体 $K \supset C$ 和 K 的一个充分细的一个三角剖分 T，设 T 中与 C 相交的 n 维单形之并为 F．对于 F 中的 n 维单形 σ，因为 $g^{-1}(\sigma) \neq \varnothing$，对 σ 的顶点 a 定义 $h_0(a) \in g^{-1}(\sigma)$．然后延拓为 F 上分片仿射的映射 $h_0: F \to [-1,1]^n$．设 $h=h_0|C$，则因为对任意 n 维单形 $\sigma \subset F$，h_0 在 σ 上是仿射的，故 $h(\sigma \cap C)=h_0(\sigma \cap C)$是疏朗的，从而 $h(C)$是疏朗

的；并且只要 T 剖分得足够细，可使每个 $g^{-1}(\sigma)$的直径$<\frac{1}{2}$，因此$|h(g(x))-x|<\frac{1}{2}$.

进而 Brouwer 分两步来证明维数不变性如下：设 $m>n$.

(1) 因为 $\mathbf{R}^m$ 中一个方体K 包含一个疏朗集K'，它是$[-1,1]^n$ 在某连续单射j 之下的像. 若存在一个连续单射 f: $K\to[-1,1]^n$，则 $f\circ j$ 是连续单射将$[-1,1]^n$ 映成 $\mathbf{R}^n$ 中的一个疏朗集. 这是不可能的；

(2) 如果 $\mathbf{R}^n$ 中某方体K'包含着$[-1,1]^m$ 在某同胚g 之下的像. 因为存在一个连续单射 h: $K'\to[-1,1]^m$ 使得$h(K')$是疏朗的，则 $h\circ g:[-1,1]^m\to[-1,1]^m$ 是一个连续单射且$h\circ g$ 的像是疏朗的，这也是不可能的.

由此可知，对于 $m\neq n$ 不存在将 $\mathbf{R}^m$ 映成 $\mathbf{R}^n$ 的同胚. 这便是说 $\mathbf{R}^n$ 的维数n 是一个拓扑不变量. 并且这也是历史上第一次明确地提出了拓扑不变量概念.

§3.3 区域不变性

区域不变性定理的陈述是：若 A 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个紧子集，并且 $f:A\to\mathbf{R}^n$ 是一个连续的单射，则 f 将A 的内点映成$f(A)$的内点. 由此立即可知f 将A 之内部同胚地映成$f(A)$的内部. 这个定理也可推出维数不变性：假设对于 $n<m$ 存在一个将 $\mathbf{R}^m$ 中非空开集 U 映成 $\mathbf{R}^n$ 中开集的同胚f. 因为 $\mathbf{R}^n$ 可以看成 $\mathbf{R}^m$ 中一个疏朗子集，对于 $\mathbf{R}^n$ 中相对紧的非空开集 V 使得$\overline{V}\subset U$，则有$f(\overline{V})$作为 $\mathbf{R}^m$ 中的子集是无内点的. 这与区域不变性定理相矛盾.

Brouwer 先后给出了两个证明. 第一个证明 [Br 7; 485] 用到所谓不分割定理，如今常作为 Jordan 曲线定理之推广 Jordan-

Brouwer 分割定理的一部分，是由 Brouwer 在同一篇文章中证明的．不分割定理说：如果 U 是 $\mathbf{R}^n$ 中一个连通的开集，$F\subset U$ 是 S^{n-1}中一个紧的真子集 A 的同胚像，则 $U\setminus F$ 是连通的．由此推导区域的不变性，Brouwer 采用了反证法．设 U 是 $\mathbf{R}^n$ 中一个非空的有界开集，f 是将 $\overline{U}$ 映入 $\mathbf{R}^n$ 的一个连续的单射，并且设存在一点 $P\in U$ 使得$f(P)$不是 $f(U)$的内点．因此存在以 $f(P)$为中心半径任意小的球面 $\Sigma\not\subset f(\overline{U})$．取 $Q\in U$ 使 $Q\neq P$．当 Σ 的半径小于$f(P)$与 $f(Q)$之距离后，可取得使 $F=f^{-1}(\Sigma\cap f(\overline{U}))$包含于以 P 为中心的一个不包含 Q 的闭球体 $B\subset U$ 之内．由不分割定理，$U\setminus F$ 是连通的，P 与 Q 可用一折线 L 连接而使$L\subset U\setminus F$．因此$f(L)\subset f(U)$连接 $f(P)$和 $f(Q)$而不遇到 $\Sigma\cap f(\overline{U})$．这是一个矛盾，此矛盾证明了区域不变性定理．

Brouwer 的第二个证明［Br 7；509～510］较为简单而只用到映射度．设 U，f 和 $P\in U$ 如上．设 B 是以 P 为中心的一个小的开球体，$K=\partial B$ 是 B 的边缘，满足 $\overline{B}\subset U$．设 V 是 $\mathbf{R}^n\setminus f(K)$中包含 $f(P)$的连通分支，因而 $V\supset f(B)$．Brouwer 证明 $V=f(B)$时用到了映射度的局部化形式．若 $f(B)\neq V$，将推出 $d(f,B,V)=0$，因为$\partial B=K$ 而 $V\cap f(K)=\varnothing$．在维数不变性的证明中，Brouwer 已经证明了存在一个非空开球体$D'\subset f(B)$，故 $D=f^{-1}(D')\cap B$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中开集，且 $f|D$ 是将 D 映成 D'的一个同胚．因此 $d(f,D,D')=\pm1$．若取 $q\in D'$，则一方面 $d(f,B,q)=d(f,B,V)=0$；另一方面，$d(f,B,q)=d(f,D,D')=\pm1$，从而导致矛盾！

§ 3.4 Jordan 曲线定理的推广

Jordan 曲线定理之推广现今称为 Jordan-Brouwer 定理，它于

1911 年被法国数学家 H. L. Lebesgue 和 Brouwer 分别研究. 这个问题可以细分为三个部分. 设 $\mathbf{R}^n$ 中的子集 J 是同胚于 ($n-1$) 维球面 S^{n-1}, 则

(i) 余集 $\mathbf{R}^n \setminus J$ 至少有两个连通分支;

(ii) J 是 $\mathbf{R}^n \setminus J$ 的每个连通分支的公共边界;

(iii) $\mathbf{R}^n \setminus J$ 至多只有两个连通分支.

Lebesgue 于 1911 年 3 月发表了 [L 1], 概述了 (i) 的一个证明. Brouwer 起初怀疑这个证明不正确, 因为 Lebesgue 的用语不够精确. 但他后来承认 (i) 可用 Lebesgue 的方法证明. 但是 Lebesgue 此后未再写过完全的证明, 而 Brouwer 也不想写出一个完全的证明, 可能因为与 Lebesgue 就维数定义而吵架的缘故. 结论 (i) 的完全证明直到 1922 年才由 Alexander 完成 [Al 4].

Lebesgue 提出的命题 (i) 的证明思路如下. 对于 $0 \leqslant k \leqslant n-1$, 设 L^k 是 $\mathbf{R}^n$ 中一个同胚于 S^k 的子集. 则存在 $\mathbf{R}^n$ 中一个同胚于 S^{n-k-1} 的子集 L_1^{n-k-1} 使得 L^k 与 L_1^{n-k-1} 相环绕 (即环绕数模 $2 \neq 0$). 当 $k=n-1$ 时, $S^{n-k-1}=S^0$ 由两点组成, 此陈述等价于 (i). 当 $k=0$ 时命题成立, 再对 k 用归纳法证之. 设 g 是同胚 f: $S^k \to L^k$ 的一个分片仿射逼近. 设 D_+, D_- 为 S^k 的上半和下半球面且 $S^{k-1}=D_+ \cap D_-$; 设 A_+, A_- 和 L^{k-1} 是它们在 f 之下的像. 作为归纳假设 L^{k-1} 被 S^{n-k} 的同胚像 L_1^{n-k} 所环绕. 将 L_1^{n-k} 换成一个任意近的分片仿射逼近 $h(S^{n-k})$, 使得 $g(D_+) \cap h(S^{n-k})$ 相交于有限个点, 并且具有奇数个点 (若不然, 将 D_+ 换成 D_-). 如果 p 是这样的一个点, 稍微变动一下 g, 使 p 是 $g(S^k)$ 中一个 k 维单形与 $h(S^{n-k})$ 中一个 $(n-k)$ 维单形 σ 的交点, 并是这两个单形的内点. 则 σ 的边缘与 $g(S^k)$ 相环绕. 归纳法完成.

Brouwer 发表了两篇文章讨论 Jordan-Brouwer 定理. 头一篇 [Br 7; 489～494] 只讨论了命题 (iii), 对命题 (ii) 只说了它

可由不分割定理推出，而未给出细节. 而不分割定理则在早先的一篇论文中给出了证明. 对于任意点 $x_0 \in J$，设 σ 是 J 的一个充分细的三角剖分中的一个（$n-1$）维单形，包含着 x_0 为其内点. 若 G_1 和 G_2 是 $\mathbf{R}^n \setminus J$ 的两个连通分支，$y_1 \in G_1$ 且 $y_2 \in G_2$，由不分割定理，存在一条在 $\mathbf{R}^n \setminus (J \setminus \sigma)$ 中连接 y_1 和 y_2 的折线弧，在该弧上有 G_1 中的点和 G_2 中的点，均与点 x_0 的距离小于 σ 的直径. 这便证明了（ii）.

命题（iii）的证明占了四页篇幅，它很复杂，充满着隐谕很深的陈述而使得很难读懂. 下面是经过简化的有关 Brouwer 的推理的要点的解释. 他反复应用一个在不分割定理那篇文章中首次提出的一个引理 [Br 7; 478]：一个 n 维的有边假流形的边缘是一些不相交的闭的（$n-1$）维假流形的并. 这个引理是不对的，因为有例子说明边缘中的一个（$n-2$）维单形有可能被包含于边缘的多于两个（$n-1$）维单形中. Brouwer 知道这个事实，而用下面的说法绕过这一点，他说对于边缘中 $p \leqslant n-2$ 维单形使不成为假流形的（$n-1$）维单形会成对出现，而应当“抵消”.

命题（iii）的证明基于折线状的 Jordan 曲线与（$n-1$）维单形的环绕数概念. 设 E 是 $\mathbf{R}^n \setminus J$ 的无界分支，G 为一个有界分支，$p \in G$. Brouwer 的证明的大部分是构作一个包含点 p 的 Jordan 折线 L 使得 L 对 J 的某三角剖分的一个（$n-1$）维单形 σ 的边界 j 的环绕数 $lk(L, j) = \pm 1$. 现在设在 $\mathbf{R}^n \setminus J$ 中存在第三个分支 G'. 利用它可推出 $lk(L, j) = 0$. 这是一个矛盾!

第二篇文章紧跟着头一篇，也发表在 Mathematische Annalen [Br 7; 498～505] 上，Brouwer 利用头一篇文章中的办法将 Schönflies 对 $\mathbf{R}^2$ 中的 Jordan 曲线证明的某些结果推广到 $\mathbf{R}^n$ 中.

§3.5 不分割定理

这个定理 Brouwer 陈述并证明在"区域不变性的证明"[Br 3] 中. 在那里他花了 6 页篇幅来证明我们所谓的不分割定理，而且是全部 Brouwer 定理的证明中最难懂的. 我们介绍其轮廓于下.

Brouwer 推广了波兰人 Z. Janiszewski [Ja] 的一个有关平面点集的定理作为预备知识：设 p，$q\in S^{n-1}$，X 和 Y 是开球体$B^n=\{|x|<1\}$的两个不相交的相对闭集. 设 p 和 q 在 B^n 中不被 X 也不被 Y 所分割，意指存在 B^n 中的连接 p 和 q 的 Jordan 弧 L 和 M 使得 $L\cap X=M\cap Y=\varnothing$. 则 p 和 q 不被 $X\cup Y$ 所分割，即存在 B^n 中连接 p 和 q 的 Jordan 弧 N 使得$N\cap(X\cup Y)=\varnothing$. Brouwer 用 B^n 的充分细的三角剖分的子复形构成的 X 和 Y 的邻域来逼近，并证明当将 X 和 Y 换成这些邻域时定理成立. 然后利用这个定理 Brouwer 证明，若 S^{n-1}中的点 p 和 q 在 B^n 中被相对闭集 X 所分割，则它们被 X 的某个连通分支所分割.

不分割定理的证明本质上用到反证法. 可分成三步.

第一步：设 J 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个"Jordan 超曲面"，M 是 J 的一个闭的真子集. Brouwer 断言，假设 $\mathbf{R}^n\setminus M$ 有不止一个连通分支使得 p 是 M 在 J 中的一个边界点，D 是 $\mathbf{R}^n$ 中一个以 p 为中心的开球体，$H=\partial D$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中一个（$n-1$）维球面，a，$b\in H$ 在 D 中被 $M\cap D$ 所分割. 由预备结果可知在 $M\cap D$ 中有一个连通子集 t 在 D 中相对闭，包含点 p 并在 D 中分割 a 和 b. 设 $u=\bar{t}\cap H\subset H\cap M$，$G$ 是 $M\setminus u$ 在 J 中的包含 t 的连通分支. Brouwer 证明了 $t\neq G$. 当 J 之三角剖分充分细时存在一个 $(n-1)$维单形 σ 包含于$G\setminus t$ 中.

第二步：利用点 b 为极，将 $\mathbf{R}^n \setminus \{b\}$ 作一个反演后，D 成为 $\mathbf{R}^n$ 中的一个开的半空间，以超平面 H 为其边界，$a \in H$；u 成为 H 的闭子集而不包含点 a；$G \subset D$ 是 J 中一个开子集的同胚像；t 是 G 中一个相对闭子集．$u = \bar{t} \cap H$ 且 $G \setminus t$ 包含 J 的三角剖分 T 中的一个 $(n-1)$ 维单形．如果 π：$H \setminus \{a\} \to S$ 为从点 a 将 $H \setminus \{a\}$ 投射到 H 中以点 a 为中心的 $(n-2)$ 维球面 S 上．因为 $a \notin u$，令 $\rho = \pi | u$：$u \to S$，再将 ρ 延拓成连续映射 $\bar{\rho}$：$t \cup u \to S$．

第三步：设 N 是 t 在 D 中余集中使得 $a \in \bar{N}$ 的那个连通分支．设 T' 是半空间 $\bar{D}$ 的一个三角剖分，使得 T' 中与 H 相交的 n 维单形与 H 相交于其边界上的一个 k 维单形 $(k \leqslant n-1)$；这些相交得到的单形组成 H 的一个三角剖分 T''．然后取 T' 的逐次重分 T_ν'，使其细度趋于 0，对 $N \cup (H \setminus u)$ 构作三角剖分 N_ν 为 T_ν' 中包含于 $N \cup (H \setminus u)$ 中的单形组成；点 a 假设位于该三角剖分的某 $(n-1)$ 维单形 σ_0 之内部．由 §3.4 命题 (iii) 证明中的引理知，N_ν 在 $\mathbf{R}^n$ 中的边缘是 $N_\nu \cap H$（它包含着点 a）和有边缘假流形 L_ν 的并，并且 $F_\nu = L_\nu \cap H$ 是闭的 $(n-2)$ 维假流形之并．对于 L_ν 中的不在 H 中的任意顶点 c，设 c_1 是 t 的一点使与 c 之距离为 $d(c, t)$，并令 $\tau(c) = \bar{\rho}(c_1)$．若 $c \in F_\nu$，令 $\tau(c) = \pi(c)$．然后延拓 τ 到 L_ν 上，使之成为分片仿射映射；于是 $\tau: L_\nu \to S$ 是连续的．欲获得矛盾，对于充分大的 ν，用两种方法来计算 $\tau | F_\nu$ 之映射度．首先，因为 $F_\nu = L_\nu \cap H$，当 ν 足够大，对 L_ν 中任意 $(n-1)$ 维单形 σ_1，$\tau(\sigma_1)$ 包含于 S 的半个球面（与 σ_1 有关）中．故 τ 限制于 σ_1 的边缘的映射度为 0．再由映射度的加法性质及 L_ν 中任意 $(n-2)$ 维单形是两个 $(n-1)$ 维单形之面除非落入 F_ν 中而得 $\deg(\tau | F_\nu) = 0$．其次，考虑 $\bar{N}_\nu \cap H$ 中的 $(n-1)$ 维单形，除 σ_0（包含着点 a）外，设它们很小．它们在 π 之下的像属于 S 的半球面，故 π 限制于每个这种单形之边缘的映射度为 0．从而由映射度的加法性质 $\deg(\tau | F_\nu) = \deg(\pi | F_\nu) =$

$\deg(\pi|\sigma_0)=\pm 1$. 这是一个矛盾，此矛盾证明了不分割定理.

§3.6 维数概念

在集合论出现以前，数学家们对维数的概念尚未深究而处于模糊状态. 通常认为 $\mathbf{R}^n$ 是 n 维的. 对一般的图形，若它至少要用 n 个参变量来表示，则认为是 n 维的. 但 19 世纪后期的两个重要发现使人们认识到这里有问题，甚至有危险. 第一个发现是 Cantor 于 1877 年证明了直线上的点与平面以及任意 $\mathbf{R}^n$ 上的点可建立一一对应. 就是说，平面以及任意 $\mathbf{R}^n$ 上的点并不比直线上的多. 再换个说法，平面以及任意 $\mathbf{R}^n$ 可以单参数化. 不过，Cantor 的证明所给出的对应很不连续. 接着在 1890 年意大利数学家 G. Peano 发现，存在从直线 $\mathbf{R}$ 到平面以及任意 $\mathbf{R}^n$ 的连续映射，被称作 Peano 曲线. 这就是说，平面以及任意 $\mathbf{R}^n$ 可以连续地单参数化（虽然不是一一地）. 用连续参数的数目来定义维数也似乎成了问题了. 于是，一个有待解决的极重要问题是：是否可能建立 $\mathbf{R}^n$ 与 $\mathbf{R}^m$ $(n\neq m)$ 之间的对应，既有 Cantor 的又有 Peano 的性质，即既是双射又是连续的? 事实上，当 Dedekind 在得知 Cantor 的结果后便猜想：对于 $n\neq m$ 而言，想必不存在将 $\mathbf{R}^n$ 映成 $\mathbf{R}^m$ 的双方连续的双射. 这个猜测的肯定的解答将成为分析学甚至物理学的一块基石，因为否则维数的几何意义从而物理意义便将失去. 当 $m=1$ 而 $n>1$ 时，这不难证明，因为一点将分割 $\mathbf{R}$ 而不分割 $\mathbf{R}^n$. 直到 1910 年，数学家只能做到 $m=2$ 及 3，$n>m$. 而一般的答案是 1911 年由 Brouwer 给出，这就是"维数不变性"定理，参见 §3.2.

但事情还才刚刚开始. 那时 Brouwer 并未为拓扑空间引入维数概念，而只是对一个特殊空间 $\mathbf{R}^n$ 证明了其由代数学定义的维

数是拓扑不变的．这仍然很不适应当时数学发展的形势．实际上，Poincaré 在 1905 年的［P 9］和 1912 年的［P 10］中，强调指出维数意义的重要性，并建议用一个归纳过程来陈述维数概念：空间如果可以被点所分开，其维数是 1，如果可以被 1 维的子集所分开，其维数是 2，如果可以被 2 维的子集所分开，其维数是 3，如此等等．这是历史上维数概念最早的雏形．

接下来是 Lebesgue，当他于 1910 年 10 月从 Mathematische Annalen 的编辑 Blumenthal 处得知 Brouwer 有关维数不变性的证明后，在给 Blumenthal 的信中概述了另一个证明［L 1］．这个证明基于一个全新的重要想法．他观察到一个平面区域用充分小的闭"砖块"覆盖时，总有该区域中的点属于至少三个"砖块"．于是他陈述了如下定理：$\mathbf{R}^n$ 中的一个有界的开区域 D 被充分小的闭集合覆盖时，总有该区域中的点属于至少 $n+1$ 个这种集合之中．这个定理当然立即推出"维数不变性"，现在定理中的条件应用到一般空间时被认为是 Lebesgue 意义下的维数定义．

Brouwer 于 1913 年［Br 7；540～546］采纳了 Poincaré 的建议性定义，稍做改造以符合直觉：如虽然对 $\mathbf{R}^3$ 中的圆锥面去掉顶点后会分开锥面，但我们不应当认为圆锥面是 1 维．Brouwer 采用的分割性如下：设 E 是一个拓扑空间，E 中的两个不相交的闭集 F 和 F' 被集合 C 分割开，是指 E 中任何连通子集若与 F 和 F' 都相交，则必与 C 相交．然后他定义空间是 0 维的，若它不包含多于一点的连通集，而一个空间是 $n(>0)$ 维的，若 n 是最小的正整数，使得空间的任何两个不相交的闭集可被一个维 $\leqslant n-1$ 的子集分割开．这个定义可以局部化为，空间在其一点 p 有维数 n，若点 p 有一个由 n 维的邻域组成的基本系统．

1922 年苏联的 P. Urysohn［Ur 2］和奥地利的 K. Menger［Men］这两位刚过 20 岁的青年独立地同时提出了很类似于 Brouwer 的维数定义．他们认为空集的维数是 -1；非空的空间的维数是最小的 $n\geqslant 0$，使得每点有一个由边界的维数 $<n$ 的邻

域组成的基本系统；非空的空间的维数是 $+\infty$，如果上述整数 $n\geqslant 0$ 找不到．虽然 Brouwer 的定义与 Urysohn-Menger 的定义都是从低维到高维归纳地进行，但分割的方法不一样，因此有区别．例如［Hur-W；13 和 23］指出在 Brouwer 的定义下，完全不连通的空间的维数是 0，而按 Urysohn-Menger 定义则可找到任何有限维的完全不连通空间．有关 Urysohn-Menger 的维数理论及有关的问题已发展为一般拓扑学中一个重要分支，读者可参考［Hur-W］及［N］．

维数理论的某些内容与代数拓扑学有关．对于可分度量空间 E，若其 Urysohn-Menger 维数是 n，则对于 $p>n$ 其基于有限开覆盖的 Čech 同调群 $\check{H}_p(E;G)$ 均为 0．值得注意的是，对奇异同调则不然，存在有限维的紧致度量空间，其奇异同调群有无穷多个是非 0 的［B-M］．此外，运用同调或上同调亦可定义维数概念，此处不赘．

§3.7 不动点定理

早在 1909 年 Brouwer 就研究过 2 维球面 S^2 到自身的连续映射 f．他先设 f 是连续的双射（从而是一个同胚）并且保持定向，他证明至少存在 f 的一个不动点 x，即使得 $f(x)=x$．这个证明占了九页篇幅［Br 7；195～205］，并用到了有关 S^2 上曲线形变的复杂推理．1910 年他给这个结果一个新的证明，是作为 S^2 上连续向量场必有一个奇点这个定理的一个推论．这里用到另一个复杂的推理［Br 7；303～318］．

到了 1911 年，当 Brouwer 给出映射度的定义后［Br 2］，他知道他可以用这个概念来证明，当连续映射 $f: S^n\to S^n$ 满足条件 $\deg(f)\neq(-1)^{n+1}$ 时至少存在一个不动点．这个定理等价于：

若 f 无不动点，则$\deg(f)=(-1)^{n+1}$.

他的头一个证明很不简单，用到 S^n 上具有孤立奇点的连续向量场的指数和的计算.

在接下来的一篇文章［Br 7；454～472］中，Brouwer 得到一个不用向量场的简单证明：如果 f 无不动点，连接 x 和$f(x)$的大圆弧提供了将 f 变成对径映射a：$x\mapsto -x$ 的一个伦移，而$\deg(a)=(-1)^{n+1}$. 这就是现代教科书上普遍采用的证法.

上面那个定理当时并未引起数学家们很大的注意，可能他们尚不熟悉映射度这个新概念. 相反，人们对 Brouwer 的一个推论却极有兴趣. 设 g 是方体 I^n 到自身的一个连续映射，则 g 必至少有一个不动点. Brouwer 证明如下. 将 I^n 换成 S^n 的上半闭球面 D_+，因为两者同胚. 然后将 g 关于赤道对称地延拓成连续映射 f：$S^n\to D_+\subset S^n$. 因为作为 S^n 到自身的连续映射 f 不是满射，故$\deg(f)=0$. 由上面的定理 f 至少有一个不动点. f 的这个不动点必位于D_+内，从而这个点必是 g 的一个不动点.

这个推论现今在各种场合都以 Brouwer 不动点定理而为人们所知晓. 它之所以引起人们极大的兴趣，是因为它对映射，除连续性外无任何其他要求，而可以广泛应用以求方程的解的存在性.

不动点定理后来被推广到无穷维的情形，在应用上尤为重要. 第一个推广到函数空间的是 G. D. Birkhoff 和 O. Kellogg 于 1922 年的［Bir-K］. 随后，J. Schauder 在 1927 年推广到有基的 Banach 空间的凸紧集［Sch 1］，又在 1930 年推广到任意 Banach 空间的凸紧集［Sch 2］，最后又推广到可分 Banach 空间的弱紧凸集和弱连续映射上［Sch 3］. 最重要的推广是 1934 年由 J. Leray 和 Schauder 在著名的文章［Le-S］中所做的，他们用到了 Brouwer 映射度概念. 此定理在偏微分方程理论中有许多重要应用.

第四章　同调的不变性和对偶定理

为了将 Poincaré 开始的组合拓扑学建立在严格的基础上，前后历史花费了 30 年. 其中首先是 Brouwer，如第三章所介绍，他独立地创造性的研究，对组合拓扑学作出了根本性的贡献. 但他后来潜心数学基础的研究，被认为是直觉主义的创始人和代表，建立了构造主义的数学体系，并与德国数学家 D. Hilbert 发生了严重的对立. 而在法国，自从 Poincaré 于 1912 年去世直到 20 年代末，并无人在这方面工作. 同调的不变性这一首要问题，历史地由美国普林斯顿的拓扑学家承担起来. 同时，在欧洲德奥匈等国，亦有少数优秀的数学家加入研究行列.

§4.1　组合的同调概念

Poincaré 的研究对象是 C^1 流形，有时甚至是解析流形. 这一点很快被后继者抛弃. 因为 Poincaré 的三角剖分中的胞腔，本质上是欧氏空间中有界凸体闭包的同胚像，因此同调理论可对一般的多面体，即后来称为复形的对象来建立. 这是首先由 J. W. Alexander 和 O. Veblen 于 1913 年 [AL-V] 实现的. 一个复形是指一个紧空间 X 被分解为有限个不同维数的胞腔，记这

个分解为 T，T 中任一胞腔的边界是 T 中若干个更低维数的胞腔之并．T 称为空间 X 的一个三角剖分．而偶对（X，T），或者含糊一点，X，被称为一个胞腔复形．原先，Poincaré 还假设了对于 T 中胞腔的最高维数 p 而言，每个$(p-1)$ 维胞腔应当包含于正好两个 T 中的 p 胞腔的边界中，因为他的对象都是流形．这一条在推广为复形时被去掉了．Poincaré 采用过的重心重分的方法自然导致了特殊的胞腔剖分，单纯胞腔复形的概念，在这种三角剖分 T 中的胞腔均为（曲线的）单形，并且 T 中的每个单形的每个面均属于T．这种条件尚不能排除这样一种可能，T 中两个不同的 k 维单形的边界相交于远比一个单个的$(k-1)$ 维单形为复杂的集合．例如，将一个剖分为两个三角形的矩形的两端等置，得到一个平环的一个三角剖分而形成一个单纯胞腔复形，这两个三角形的交由两个一维单形组成．为避免这种情形发生，S. Lefschetz 在他 1930 年的书 Topology [Le 8] 中，采用了新的定义．设存在从 X 到某个 $\mathbf{R}^N$ 中的子空间X'的同胚，使得 T 中每个单形由该同胚映成X'的一个由直线单形组成的三角剖分 T' 中的一个单形，并使得 T'中的每个单形的每个面均属于 T'．我们依照 Lefschetz，称这种（X，T）为一个单纯复形，而称（X'，T'）为一个欧氏单纯复形．将胞腔取为单形后，胞腔的定向可利用单形的顶点之顺序来界定．

三角剖分概念从流形扩充到多面体(复形)后，有关 Poincaré 对于一个三角剖分的 Betti 数和挠系数的定义没有产生任何变化，也不改变其计算的算法．实际上，其算法是一个纯代数的过程．因此甚至在 Poincaré 的补充之后的第一篇拓扑学文章，即 M. Dehn 和 Heegaard 的百科全书文章 Analysis Situs [D-H] 中，已经有了用纯粹代数的办法来定义“同调”的企图．E. Steinitz 在 1908 年 [Stei] 中做了进一步改进．而直到 1923 年 H. Weyl 在 [Wey 3] 中，继承这个观点，建立了一个代数的“同调”理论．然而 Weyl 的公理同 Steinitz 的一样，过于拘泥于模仿拓扑的情

形，而不适用于非常不同的拓扑问题和代数问题.

除了 Poincaré 的关联矩阵外，Weyl 已经考虑到以有向的 j 维胞腔为基的 $\mathbf{Z}$ 模 C_j. 德国人 H. Hopf（纳粹统治时期被迫成为瑞士公民）曾经于 1925 年在哥廷根度过一年，当时德国女数学家 E. Nöther 正在将线性代数从矩阵和行列式中解放出来，她［Nö］看到 j 维链的边缘定义了一个 $\mathbf{Z}$ 模之间的同态

$$\mathbf{b}_j: C_j \to C_{j-1}, \tag{1}$$

满足

$$\mathbf{b}_{j-1} \circ \mathbf{b}_j = 0. \tag{2}$$

从而有关 Betti 数和挠系数的讨论归结为 $\mathbf{Z}$ 模

$$H_j = \operatorname{Ker} \mathbf{b}_j / \operatorname{Im} \mathbf{b}_{j+1}. \tag{3}$$

Hopf 在 1928 年发表有关 Lefschetz 迹公式的文章［Hop 4］中，采用了同调模. 奥地利人 L. Vietoris 于 1926 年［Vie 1］也独立地为了给比单纯复形更为广泛的空间定义同调，也需要摆脱矩阵而采用(3)来定义单纯复形的同调群.

这个改变有着重大的后果，无论对于拓扑学或是对于代数学本身. 因为显然同调模的定义立即可以推广到任意有限的或无限的在某个环上满足(2)式的模的序列 $C_. = (C_j)_{j\geqslant 0}$ 和模同态 $\mathbf{b}_j$ ($j \geqslant 0$)(此时 $\mathbf{b}_0$ 理解为同态 $C_0 \to \{0\}$). 我们称这样的一个系统 (C_j, $\mathbf{b}_j$) 为一个链复形. 奥地利人 W. Mayer 于 1929 年第一个考虑了这种系统［May］, 不过加上 C_j 为具有限基的自由模的条件. 现今我们称这种系统为一个微分分次模.

这看上去已是同调代数的开始. Mayer 特别考虑了由 Vietoris 建议的一个问题：设每个 C_j 有一个基，它是两个子集 B_j^1 和 B_j^2 之并，使得 C_j^1, C_j^2 和 C_j^3 是分别由 B_j^1, B_j^2 和 $B_j^1 \cap B_j^2$ 为基的 $\mathbf{Z}$ 模，$\mathbf{b}_j$ 在它们上的限制分别记为 $\mathbf{b}_j^1$, $\mathbf{b}_j^2$ 和 $\mathbf{b}_j^3$, 三个系统 (C_j^1, $\mathbf{b}_j^1$), (C_j^2, $\mathbf{b}_j^2$) 和 (C_j^3, $\mathbf{b}_j^3$) 都是微分分次模，它们各自的同调模 H_j^1, H_j^2, H_j^3 与 (C_j, $\mathbf{b}_j$) 的同调模 H_j 之间有什么关

系？Mayer 证明了 $H_j=E_j\oplus G_{j-1}$，其中 $G_j\subset H_j^3$ 由同时是 C_j^1 和 C_j^2 中的边缘的闭链之类组成，而 E_j 由 C_j^1 中的一个闭链与 C_j^2 中的一个闭链之和的类组成．在 1930 年 Vietoris［Vie 2］证明了

$$E_j\cong(H_j^1\oplus H_j^2)/(H_j^3/G_j).\tag{4}$$

这些结果后来写成了正合序列，而被称为 Mayer-Vietoris 序列，在代数拓扑学的计算中有大量应用．Mayer 本人就在［May］中计算过环面 T^2 的同调群，他将环面 T^2 分解为两个圆柱面之并，使这两个圆柱面之交是两个不相交的圆柱面之并．

另一方面，在 1926 年左右，好几位数学家，Alexander［Al 7］，俄国人 P. S. Alexandroff［Af 1］，英国人 M. H. A. Newman［Ne］以及 B. L. van der Waerden．［W 1］同时引进了抽象的复形和链的概念．这起源于欧氏单纯复形．因为一个直线的欧氏单形完全由其诸顶点所完全确定，同时其任一定向亦由其诸顶点的一个排序所完全确定．于是人们可以定义一个组合复形为一个集合（顶点集）V，带上其有限子集组成的一个（有限或无限的）集合 $\mathfrak{S}$，$\mathfrak{S}$ 中元素称为组合单形，满足条件：V 的任一单点子集均属于 $\mathfrak{S}$；若 $S\in\mathfrak{S}$ 并且 $S'\subset S$，则 $S'\in\mathfrak{S}$．$S\in\mathfrak{S}$ 的维数定义为其元素个数减 1；S 的元素的两个排列相差一个偶置换时，认为是 S 的一个定向（当 S 的元素个数为 1 时，规定它有两个定向，当 S 为 $\varnothing$ 时，不定义其定向）；S 的任一子集称为 S 的一个面．于是该组合复形的 j 维链模 C_j 是有限的整系数线性组合

$$\sum\nolimits_i x^i(a_i^0,a_i^1,\cdots,a_i^j)\tag{5}$$

的集合，其中 $x^i\in\mathbf{Z}$，而（a_i^0，a_i^1，…，a_i^j）是 $\mathfrak{S}$ 中一个有向的 j 维单形，即 a_i^0，a_i^1，…，a_i^j 是不同的顶点，它们组成集合 $S\in\mathfrak{S}$，且对（0，1，…，j）的一个置换 π 有下面的等式

$$(a_i^{\pi(0)},a_i^{\pi(1)},\cdots,a_i^{\pi(j)})=\mathrm{sgn}(\pi)(a_i^0,a_i^1,\cdots,a_i^j).\tag{6}$$

而边缘运算 $\mathbf{b}_j$ 则定义为

$$\mathbf{b}_j(a_i^0,a_i^1,\cdots,a_i^j)=\sum_{k=0}^{j}(-1)^k(a_i^0,\cdots,\hat{a}_i^k,\cdots,a_i^j). \quad (7)$$

其中记号 ˆ 表删去该项，再做线性延拓到 C_j 上，而使（C_j，$\mathbf{b}_j$）成为一个链复形．其同调模则定义为组合复形（V，$\mathfrak{S}$）的同调模．也可以先选取 V 的一个全序，再只考虑（5）中满足 $a_i^0<a_i^1<\cdots<a_i^j$ 的排列者；由此显见所得 C_j 是一个自由 $\mathbf{Z}$ 模．

对于任一欧氏单纯复形（X，T），我们可给它配备一个有限的组合复形（V，$\mathfrak{S}$），其中 V 是 T 中所有 0 维单形，即顶点，之集合，而 $\mathfrak{S}$ 是 T 中单形的顶点集作为元素而成的集合．容易看出，存在一个从（X，T）的链复形到（V，$\mathfrak{S}$）的链复形的同构，与边缘算子交换，从而给出从（X，T）的同调模到（V，$\mathfrak{S}$）的同调模的一个同构．反之，也容易证明 [Le 12; 97]，对于任一组合复形（V，$\mathfrak{S}$），存在一个欧氏单纯复形（X，T），使得（V，$\mathfrak{S}$）与之相配，（X，T）称为（V，$\mathfrak{S}$）的一个实现，并且同一个组合复形的任何两个实现的空间是同胚的，而三角剖分是同构的．

Poincaré 曾对胞腔三角剖分引进重心重分．将它应用于欧氏单纯复形(X,T)，可得其重心重分复形(X,T')．重心重分概念可转移到组合复形上．设(V,$\mathfrak{S}$)为与欧氏单纯复形(X,T)相配的一个组合复形，它的“重心重分”定义为组合复形(V',$\mathfrak{S}'$)，其中顶点集合 $V'=\mathfrak{S}$，而 $\mathfrak{S}'$ 中一个 p 维组合单形恰是 $\mathfrak{S}$ 中 $p+1$ 个不同维数的组合单形，满足 $S_1\subset S_2\subset\cdots\subset S_{p+1}$，它被称为($V$,$\mathfrak{S}$)的(第一次)导出组合复形．显然，($V'$,$\mathfrak{S}'$)相配于($X$,$T$)的(第一次)重心重分复形($X$,$T'$)[Le 12;164]．

组合复形还可推广为具有“退化的”单形的情形．此时 j 维链模 C_j' 是有限的整系数线性组合（5），其中 a_i^0，a_i^1，$\cdots$，a_i^j 是 $\mathfrak{S}$ 中某组合单形 S 的顶点，但不必是不同的；当($a_i^0,a_i^1,\cdots,a_i^j$)中有相同的顶点时，则称为退化单形，此时(6)不能用，边缘运算仍用(7)．显然存在一个自然的内射 $h:C_j\to C_j'$ 将 C_j 中元素原封不

动地视为 C_j' 中元素，还存在一个同态 $hr: C_j' \to C_j$ 将 C_j' 的链中退化单形的系数换成0，称为一个保核收缩同态. h 和 r 均与边缘运算交换，从而得同调模之同态 $h_*: H_j \to H_j'$ 和 $r_*: H_j' \to H_j$. 这两个同态都是同构，但这并不是显然的. 这一点在 Alexander 的[Al 1]中采用时，不加证明地予以认定，Lefschetz 在著名的书[Le 8]中也未给证明，而直到1938年才由 A. Tucker[Tu]提供了一个证明. 他证明了如果一个仅由退化单形组成的链是一个闭链，则它是一个边缘链. 后来，利用 Eilenberg 和 Zilber[Ei-Z]中的零调模型(acyclic model)方法容易导出 h_* 和 r_* 都是同构.

同调论的另一个突破是由 H. Tietze 在 1908 年 [Ti] 中提出，而由 Alexander 和 Veblen 在 1913 年文章 [Al-V] 中继续研究，这就是模 2 同调的概念，链取整数模 2 为系数. 因此无需考虑链中胞腔或单形的定向，并且关联矩阵中之数均取自二元域 $\boldsymbol{F}_2$ 中. 从而同调模是 $\boldsymbol{F}_2$ 上的向量空间. 这时并未给出新的不变量，p 维同调模的维数正好是 p 维 Betti 数(后来通用的，比 Poincaré 的少 1)和 p 维及 $p-1$ 维不可被 2 整除的挠系数的个数之和. 这时，还可将 Poincaré 对偶定理推广到不可定向的紧的连通的可三角剖分的 n 维流形上，即 p 维模 2 同调模($\boldsymbol{F}_2$ 上的向量空间)与 $n-p$ 维模 2 同调模($\boldsymbol{F}_2$ 上的向量空间)是同构的. 后来，Alexander 在 1926 年又进一步推广为，对任意整数 m，模 m 同调[Al 8]；而 Lefschetz 则在 1928 年[Le 6] 发现，Poincaré 谈到的可除同调就是采用有理数域 $\mathbf{Q}$ 中的系数的同调. 而这些均不能得到新的未知的不变量，这一点将来讲到万有系数定理时就会更加明白. 关于万有系数定理，请读者参考 §6.2.

在同调概念发展和完善的过程中，人们迫切地希望证明它的不变性，即同一个紧的连通的空间 X 若有两个三角剖分 T 和 T'，我们盼望能证明由 T 和 T' 构作的同调模是同构的，即不依赖于三角剖分的选取. 一个很自然的思路是，若能证明对于 X 的任意两个三角剖分 T 和 T'，存在它们的公共的重分 T''，则同

调的不变性便由同调的重分不变性推得．这个想法想必 Poincaré 就有，并尝试过而未能真正成功．它于 1908 年由 Steinitz [Stei] 明确作为一个猜想提出，后被德国人 M．Kneser 于 1925 年 [Kn 1] 冠以 Hauptvermutung（主猜测）而闻名于世．也许二十世纪的前半叶的所有拓扑学家都希望它成立，但是到 1952 年尚只能对维数$\leqslant 3$时得到证明，其中 2 维见 [Pa]，3 维见 [Moi 1]．直到 1961 年 J．Milnor [Mi 12] 举出 6 维的反例而知主猜测不成立．因此同调模的不变性必需采用另外的方法来证明．

§4.2 不变性的证明

第一个给出同调模的不变性证明的是 Alexander [Al 1]，那是 1915 年．当时尚未提出同调群或模，而是用 Betti 数和挠系数来陈述的同调量．后来他在 [Al 8] 中给了另一个证明．这些证明都用到了单纯映射和单纯逼近这两个重要的概念，第一个证明还用到奇异链的概念．

假设 X 和 Y 是两个欧氏单纯复形，从 X 到 Y 的一个单纯映射 f 是一个连续映射，使得对于所有非负整数 p 和 X 的任意 p 维单形 S，$f(S)$被含于 Y 的某个 $q(\leqslant p)$维单形之中，并且 $f|S$ 是仿射映射．由条件可知 f 将 S 的顶点映成 Y 中某个 q 维单形的顶点，而且 $f|S$ 完全被 f 在 S 之顶点上的值所确定，从而 f 完全被 f 在 X 的顶点上之值所确定．模仿上述做法，设 V 和 W 是两个组合复形，$f: V \to W$ 称为一个单纯映射，若对于所有 p 和 V 中任意 p 维组合单形 S，$f(S)$被含于 W 的某个 $q(\leqslant p)$维组合单形之中．于是从一个欧氏单纯复形 X 到另一欧氏单纯复形 Y 之间的单纯映射，将一对一地对应于从相配于 X 的组合复形到相配于 Y 的组合复形之间的单纯映射．采用§4.1 中的记号，$C_i'(X)$表示允许

退化的 j 维链模，则由单纯映射 $f: X\to Y$ 诱导得模同态 $\tilde{f}_j: C_j'(X)\to C_j'(Y)$ 如下：对 X 中任意退化或非退化 j 维单形 $(a_0, a_1, \cdots, a_j)$ 而言

$$\tilde{f}_j((a_0, a_1, \cdots, a_j)) = (f(a_0), f(a_1), \cdots, f(a_j)), \tag{8}$$

并且容易验证，$\tilde{f}_j$ 与边缘运算交换，即

$$\mathbf{b}_j \circ \tilde{f}_j = \tilde{f}_{j-1} \circ \mathbf{b}_j. \tag{9}$$

因此，$\tilde{f}_* = (\tilde{f}_j)$ 是一个链复形的同态，从而导出同调模的同态

$$f_*: (H_j'(X)) \to (H_j'(Y)). \tag{10}$$

若与§4.1 中 $h_*: H_j(X)\to H_j'(X)$ 以及 $r_*: H_j'(Y)\to H_j(Y)$ 复合，得 $H_j(X)\to H_j(Y)$，仍被拓扑学家们记作 f_*，虽然尚未证明 h_* 和 r_* 都是同构. 其实后面这个 f_* 可以直接定义，只要将(8)修改为当 $(f(a_0), f(a_1), \cdots, f(a_j))$ 退化时，$\tilde{f}_j((a_0, a_1, \cdots, a_j)) = 0$.

单纯逼近的概念归功于 Brouwer [Br 1, 2]，他运用于证明维数不变性和不动点定理，这我们已在第三章中详述过. 设 X 和 Y 是两个欧氏单纯复形，而 $f: X\to Y$ 是一个连续映射，使得对于 X 的任意单形 σ，$f(\sigma)$ 被含于 Y 的一个单形内. 于是对于任意的 $\varepsilon>0$，存在 X 的三角剖分 T 的某个高次的重心重分 T'，和一个连续映射 $g: X\to Y$，使得 g 在 T' 的顶点上与 f 重合，对于任意 $x\in X$ 有 $|f(x)-g(x)|\leqslant\varepsilon$ 且在 T' 的每个单形上是仿射的. 这是Brouwer 采用的单纯逼近. Alexander 将其推广到对任意欧氏单纯复形 X 和 Y 以及任意连续映射 $f: X\to Y$，而不设前面的条件. 他采用了 Poincaré 曾引进的“星形”概念（见§2.1），Y 的三角剖分的一个顶点 b 的星形 $\mathrm{St}\, b$，是 Y 中全体以 b 为顶点的开单形之并. 如果 $(b_k)_{1\leqslant k\leqslant N}$ 是 Y 的三角剖分的全体顶点，则 $(\mathrm{St}\, b_k)_{1\leqslant k\leqslant N}$ 是 Y 的一个开覆盖. 于是存在 X 的三角剖分 T 的某个高次重心重分 T'，设 $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant M}$ 是 T' 的全体顶点的集合，使得 f

将 X 的每个星形 $\mathrm{St}a_i$ 映入 Y 的某个星形，记它为 $\mathrm{St}b_{\varphi(i)}$. 设 X 的一个 j 维单形的 $j+1$ 个不同的顶点为 $a_0, a_1, \cdots, a_j$，则 $b_{\varphi(i)}$，$i=0,1,\cdots,j$，必为 Y 的三角剖分中的某个 q 维单形的顶点，且 $q \leqslant j$. 设单纯映射 g 定义为 $g(a_i)=b_{\varphi(i)}$，对所有 i. 则 g 是 f 的一个单纯逼近. 且对于任意点 $x \in X$，$f(x)$ 和 $g(x)$ 将位于 Y 的三角剖分中的一条线段上，从而 f 与 g 是同伦的.

奇异链的概念首先由 Dehn-Heegaard 在他们的百科全书论文 [D-H] 中给出，但他们似乎并未用它来证明什么事情. Alexander 在 [Al 1] 中认识到，他用奇异单形的线性组合来定义新的一种链，加上边缘运算可以定义新的同调模，当然它与三角剖分无关. 若能定义从这些模到任意三角剖分的同调模之间的同构，则不变性便得到证明. 但是当时尚有含糊不清之处，诸如两个奇异单形何时应视为相等，以及奇异单形的边缘是什么，等等. 后来 Veblen [V 2]，van der Waerden [W 1] 和 Lefschetz [Le 8] 部分地改进了其证明. 直到 1933 年，Lefschetz 在 [Le 9] 中才提出了确切的概念：设 X 是一个空间，e_p 是某 $\mathbf{R}^N$ 中的一个有定向的 p 维凸多面体，$f: \bar{e}_p \to X$ 是一个连续映射，则偶对 $(e_p, f) \equiv (e_p', f')$，若有一个仿射的双射 $u: e_p' \to e_p$，使得 $f' = f \circ u$. 在关系“$\equiv$”之下的一个等价类称为一个奇异 p 维胞腔. 当将等价关系“$\equiv$”延拓到线性组合上以后，若记 $\mathbf{b}_p$ 为边缘运算，则有等价性

$$(\mathbf{b}_p e_p, f \mid \mathbf{b}_p e_p) \equiv (\mathbf{b}_p e_p', f' \mid \mathbf{b}_p e_p'),$$

这给出了新的链模上的边缘运算. 由之导出的同调模显然是仅依赖 X 的同胚型，记为 $H_j^{\sin}(X)$. Alexander 的证法如下：对于一个欧氏单纯复形 X 的一个三角剖分 T，存在一个从 T 的链定义的同调到奇异链定义的同调的自然同态

$$H_j \to H_j^{\sin}. \tag{11}$$

为证 (11) 是一个同构，等价地，要证明下面两个命题：(A) 每个奇异 p 维闭链 w_p 奇异同调于 T 的一个 p 维闭链；(B) 如果 T 中 p 维闭链是一个奇异边缘，则它是 T 中一个边缘.

为证明(A)和(B)，需要用到两项重要的预备知识.第一，三角剖分 T 的同调自然等同于其重心重分 T' 的同调.这一点甚至Poincaré 已经给出了正确的证明，在 Alexander[Al 1]，Tietze[Ti]，Veblen[V 2]和 Lefschetz[Le 8]中也都给出了证明.将重分不变性转移到奇异同调，即奇异链 w_p 可由 X 中的任意小的奇异单形组成.其次，同调在同伦下不变.这里要讨论到棱柱的代数性质以导出同伦公式.这在 Veblen 的[V 2]和 Lefschetz[Le 8]中得到正确的陈述和证明.

为证(A)，可将奇异闭链 w_p 中奇异单形经过重分后，用单纯逼近而得到 w_p 到另一个奇异链 w_p' 的同伦，后者的奇异单形(e_p, g)都满足 g 是将e_p 仿射地映到 T 中的某个 p 维单形这一条件.命题（B）也可类似地证明.应当说，当时的证明并不完全清晰.

在［Al 8］中 Alexander 给出第二个证明时，没有再用到奇异单形，而只用到单纯逼近.只需证明，如果两个欧氏单纯复形 X 和 X'是同胚的，而 T 和 T'分别是 X 和 X'的三角剖分，则同调模$H_\cdot(T)$和 $H_\cdot(T')$是同构的.设 f：$X\to X'$是一个同胚，其逆映射是 $g=f^{-1}$：$X'\to X$.设 T_i 是 T 的第 i 次重心重分，T_j'是 T'的第 j 次重心重分.对任意 i，存在一个 j 和 g 的一个单纯逼近 g_{ij}：$T_j'\to T_i$；然后，对于这个 j，存在 $k>i$ 和 f 的一个单纯逼近 f_{jk}：$T_k\to T_j'$.复合映射 $h_{ik}=g_{ij}\circ f_{jk}$：$T_k\to T_i$ 是一个单纯映射.设 i 和 k 均充分大，则由于 $g\circ f=1_X$，对于每个 p，T_i 的每个 p 维单形 σ，以及 T_k 的每个包含于 σ 中的 p 维单形 τ，h_{ik}将 τ 的每个顶点映成 σ 的一个顶点.

C_p' 仍表示允许退化的 p 维链模.设$\tilde{f}_{jk}$：$C_p'(T_k)\to C_p'(T_j')$及$\tilde{g}_{ij}$：$C_p'(T_j')\to C_p'(T_i)$分别是对应于单纯映射 f_{jk}和 g_{ij} 的链映射，而$\tilde{h}_{ik}=\tilde{g}_{ij}\circ\tilde{f}_{jk}$：$C_p'(T_k)\to C_p'(T_i)$是它们的复合.又设 sd_{k-i}：$C_p'(T_i)\to C_p'(T_k)$为将 T_i 的每个 p 维单形映成该单形在$(k-i)$

次重心重分后所得 T_k 中 p 维单形之和，并定向保持一致所得之同态. 于是有$\widetilde{h}_{ik}(sd_{k-i}(\sigma)) = \sigma + \theta_{ik}$，其中 θ_{ik}是一个退化的 p 维链，这个事实可用对 p 的数学归纳法证明. Alexander 假设了同调 $H_*(T_i)$等同于允许退化的同调 $H'_*(T_i)$，而在 $H_*(T_i)$中，$(h_{ik})_* = (g_{ij})_* \circ (f_{jk})_*$是恒等映射，故$(f_{jk})_*$有一个左逆；类似地，可得$(f_{jk})_*$的一个右逆，从而$(f_{jk})_*$是一个同构. 于是，再用同调的重分不变性，即 $H_*(T)$同构于$H_*(T_k)$，$H_*(T')$同构于$H_*(T'_j)$，就证得同调的拓扑不变性.

§4.3 流形上的对偶定理和相交

Poincaré 原来的研究对象是 C^r 流形，$r \geqslant 1$，他建立了同调概念，提出了对偶定理和相交，又引进了三角剖分. 前面讲过，利用三角剖分来定义同调允许将研究对象扩大到多面体，即胞腔复形. 很容易举出例子说明，对一般的胞腔复形来说，对偶定理是不成立的. 于是为了建立可以严格证明的对偶定理，还是要限制于"流形"这类对象. 因此，首先要对这个概念加以探讨. 当时的拓扑学家为了应用单纯复形这类方法，他们对"流形"提出了种种定义.

第一个是 Veblen 于 1921 年提出的 [V 2; 91～95]. 此定义基于一个给定的三角剖分 T 将紧空间X 剖分为一些"胞腔"，它推广了 Poincaré 的下述条件，T 中胞腔最高维若为 n，则每个$(n-1)$维胞腔恰在两个 n 维胞腔之边界内：当 $k \leqslant n-1$ 时，对于任何 k 维胞腔C，设 $Z^{n-k-1}(C)$为将 C 含入边界之 n 维胞腔的边界中之使其闭包与 C 之闭包不相交的j 维胞腔($j \leqslant n-k-1$)的并. Veblen 说，若每个 $Z^{n-k-1}(C)$都同胚于$(n-k-1)$维球面

S^{n-k-1},则(X,T)称为一个无边缘的 n 维流形.

然而，Veblen 的条件不能用纯组合的办法去验证，甚至对于 C^r 流形的一个三角剖分而言，亦无法检验，因而 Veblen 给出的关于对偶定理的证明不能认为是使人满意的．这一点被 Vietoris 于 1928 年指出 [Vie 2]．Vietoris 接着提出 h 流形概念，这是一个对维数的归纳定义，陈述如下：一个紧的单纯复形(X,T)是一个 n 维 h 流形，如果 T 的每个顶点的星形的边界是一个$(n-1)$维的 h 流形并具有与$(n-1)$维球面 S^{n-1}相同的同调. Alexander 也有类似的看法，他提出(未发表)将 Veblen 的条件减弱为要求 $Z^{n-k-1}(C)$具有与$(n-k-1)$维球面 S^{n-k-1}相同的同调．Alexander 的这个定义被 Lefschetz 在 1929 年采纳，而为后来的大多数人所使用，并被称为组合流形．这是与 Vietoris 的 h 流形概念等价的.

Poincaré 其实知道，一个复形的同调是自然同构于该复形的一个单纯重分的同调．如果从一个单纯复形(X,T)开始，我们可以设想将 T 中单形重组成 X 的一些“块形”，当然要满足一定条件，而得一个块形系统．T 的这种块形系统的链复形的同调是同构于 T 的同调．这不仅对证明对偶定理极其有用，也可简化同调模的实际计算.

苏联人 L. S. Pontrjagin 于 1931 年发表了一个关于有向的组合流形(X,T)的对偶定理的简单证明[Pt 1].他考虑 T 的重心重分 T',并像 Poincaré 曾经做过的那样,去重组 T'中的单形成为“对偶胞腔”,形成 T 的对偶三角剖分 T^*.设 E 是 T^* 中一个 k 维“对偶胞腔”,F 为 E 之边界,则$(\overline{E},F)$的相对同调与(D^k,S^{k-1})的一样,其中 D^k 为 k 维单位闭球体,S^{k-1}为 D^k 的边界,$(k-1)$维单位球面.利用 T^* 的“对偶胞腔”作为 T'的块状系统，容易完成对偶定理之证明．读者可参考江泽涵的书 [江] 的 §5.7.

Vietoris 的证明和 Lefschetz 的证明 [Le 8; 135～140] 是类似的．Seifert-Threlfall 的书 [Se-T 2] 中说，上述证明中的组合

流形可换成一个与三角剖分无关的定义，即可三角剖分并且是 1933 年 Lefschetz［Le 10］中和 Čech［Cec 3］中所定义的 n 维广义流形.

在 Poincaré 的第一篇长文 Analysis Situs［P 2］的第 9 节中，对有向 n 维流形 U 中的两个有向的有着互补维数 p 和 $(n-p)$ 维的子流形 V_1 和 V_2，若 V_1 和 V_2 在公共点 P 横截相交，即它们在点 P 的切空间只相交于一点，他定义了相交数 $S(P)$ 为 ± 1；设 V_1 与 V_2 横截相交于有限个点 $P_i, 1 \leqslant i \leqslant m$，他定义"Kronecker 指数" $N(V_1, V_2) = \sum_i S(P_i)$. 然后，Poincaré 希望证明：一个 n 维有向流形 U 中的 q 维有向紧的连通无边子流形 v_j 之间的一个同调，等价于对 U 的任一与 v_j 横截相交于有限个点的有向 $(n-q)$ 维子流形 V 有 $\sum_j N(V, v_j) = 0$. 此命题是 Poincaré 证明对偶定理的关键步骤.

采用 Pontrjagin 提供的 Poincaré 的"对偶胞腔"的构作，可将"Kronecker 指数" $N(V_1, V_2)$ 推广为"Kronecker 指数" $N(a_p, b^*_{n-p})$，其中 a_p 为复形的一个 p 维胞腔，而 b^*_{n-p} 为其一对偶胞腔，两者均有向. 这是在 1923 年，由 Veben 和 Weyl［Wey 3］完成的. 假设流形 U 的同调既可用给定的胞腔复形又可用其对偶复形来计算，于是可以定义一个双线性形式，或称为二次形式

$$H_p \times H_{n-p} \to \mathbf{Z}. \tag{12}$$

此二次形式决定了 H_p 与 H_{n-p} 之间的对偶律. 实际上，为得到这个结论，并不需在 Poincaré 的做法上增加什么. 但令人惊讶的是 Poincaré 竟然没有做到这一点，从而使今日经常使用的同调二次形式归功为 Veblen 和 Weyl.

差不多同时，Alexander 和 Lefschetz 也研究了相交. 他们都是从代数几何转向代数拓扑的，并且 Lefschetz 一直不放弃代数几何，坚持将代数拓扑注入代数几何的研究之中. 当他们转向研究胞腔复形和组合流形时，自然而然地导致将相交概念推广到任意的

闭链上.不过 Alexander 只在[Al 6]中,专门举例说明当两个流形 X 和 Y 的同调模同构,它们的相交可能根本不相同.用现在的术语说,它们的相交环不是同构的.Lefschetz[Le 4,5]做得比较仔细,他想做到,对于一个紧的连通的有向 n 维流形 X,以及任意整数 $p,q,0\leqslant p,q\leqslant n$,有一个双线性映射

$$H_p\times H_q\to H_{p+q-n}\quad(\text{或 }0\text{ 若 }p+q<n),\tag{13}$$
$$(z_p,z_q)\mapsto z_p\cdot z_q,$$

满足

$$z_q\cdot z_p=(-1)^{(n-p)(n-q)}z_p\cdot z_q,\tag{14}$$

及对任意三整数 $0\leqslant p,q,r\leqslant n$ 有

$$(z_p\cdot z_q)\cdot z_r=z_p\cdot(z_q\cdot z_r).\tag{15}$$

当然,若 z_p 和 z_q 可用子流形表示,且它们横截相交于一个$(p+q-n)$维子流形,则此子流形的同调类应与 $z_p\cdot z_q$ 只差一个符号;特别,当 $p+q=n$ 时,$z_p\cdot z_q$ 是 X 中任意点之同调类 z_0 的 λ 倍 λz_0,此处 λ 应是前面所述 Poincaré 采用的"Kronecker 指数",Lefschetz 写作$(z_p\cdot z_{n-p})$.

Lefschetz 的 $z_p\cdot z_q$ 定义如下.设 P, Q, R 分别是 p, q, n 维凸多面体,都有向且 P, Q 包含于R 中.设 V_P, V_Q, V_R 分别是它们生成的有向仿射簇.若 $P\cap Q=\varnothing$,则取 $P\cdot Q=0$;若 $P\cap Q\neq\varnothing$,仅当 $V_P\cap V_Q$ 为 $s=p+q-n$ 维时,$P\cap Q$ 是 $V_P\cap V_Q$ 中一个 s 维凸多面体,由 V_P, V_Q 和 V_R 之定向可唯一确定 $V_P\cap V_Q$ 之定向,于是取 $P\cdot Q$ 为具有这个定向的 $P\cap Q$,自然有 $Q\cdot P=(-1)^{(n-p)(n-q)}P\cdot Q$.当 P 和 Q 满足上述条件时,它们称为"处于一般位置(in general position)".设 X 是一个 n 维欧氏单纯复形做成的连通的紧的有向组合流形,T 为其三角剖分.如果 C_0 是一个 p 维链,C_0' 是一个 q 维链,且 C_0 中任一系数非零的有向 p 维单形与 C_0' 中任一系数非零的有向 q 维单形,当有非空交而均包含于同一个 n 维单形中是处于一般位

置，则可采用上面的方法，再利用线性性以定义 $C_0 \cdot C_0'$，它是一个 $(p+q-n)$ 维链．进一步他对奇异链 C 和 C' 定义了"交积" $C \cdot C'$，当 C 和 C' 为闭链时，交积 $C \cdot C'$ 亦为闭链．由此知 $z_p \cdot z_q$ 与三角剖分之选取无关，而得诸同调模的直和 $H_\cdot = \bigoplus_{0 \leqslant p \leqslant n} H_p$ 上的一个结合的反交换的环结构．

Steinitz 于 1908 年在［Stei］中，第一个引进两个拓扑空间的笛卡尔积空间概念．而首先研究两个因子空间的同调与其乘积空间的同调之关系的则是 H. Künneth［Ku 1，2］和 Lefschetz［Le 5］，时为 1923 年．他们都只考虑欧氏紧的连通的胞腔复形．用现代的语言可以简述如下．设 $T(X)$ 和 $T(Y)$ 分别是 X 和 Y 的凸三角剖分，由之可导出 $X \times Y$ 的凸三角剖分 $T(X \times Y)$ 由所有的 $A \times B$ 组成，其中 $A \in T(X)$，$B \in T(Y)$．于是 $T(X \times Y)$ 的 p 维链所成的 $\mathbf{Z}$ 模可表示为直和

$$S_p(X \times Y) = \bigoplus_{0 \leqslant k \leqslant p} (S_k(X) \otimes S_{p-k}(Y)), \tag{16}$$

而且边缘算子基本关系为

$$\partial(A \times B) = \partial A \times B + (-1)^k A \times \partial B. \tag{17}$$

据此，可利用 X 和 Y 的同调来计算 $X \times Y$ 的同调．例如当时的作者特别得到有关 Betti 数的"Künneth 公式"

$$b_p(X \times Y) = \sum_{0 \leqslant k \leqslant p} b_k(X) b_{p-k}(Y), \tag{18}$$

由此立即可得 Euler－Poincaré 示性数的公式

$$\chi(X \times Y) = \chi(X)\chi(Y). \tag{19}$$

有关 Künneth 公式的一般讨论，读者可参看［Mau］，［Mu 7］或者［Gr-H］，这些书都按他们认为方便的办法来写．

Alexander 于 1922 年发表了文章［Al 4］，将同调推广的 $\mathbf{R}^n$ 的开集上，并且将 Brouwer 推广的 Jordan 分割定理的证明纳入同调理论．设 X 是 n 维球面 $S^n (n \geqslant 2)$ 中的一个紧的（连通与否不论）m 维曲线胞腔复形（$m < n$），例如一条 Jordan 闭曲线，此时 $m=1$．他首先必须定义开集 $S^n \setminus X$ 的同调．考虑 S^n 的一个三角剖

分 T 以及 T 的逐次重心重分剖分 T_j. $S^n \setminus X$ 的 p 维链是任意 T_j 中的含于 $S^n \setminus X$ 中的 p 维单形之线性组合. 当 $k > j$ 时,若欲将 T_j 中 p 维链 C 与 T_k 中 p 维链 C' 相加,先将 C 中单形换成 T_k 中它的剖分成的有向单形之和,再都作为 T_k 中 p 维链相加. 边缘运算照常定义,从而得同调. 不过此时同调模可以不是有限生成的. 重要的是有下列结果:设 $X \subset S^n$ 是一个有限的曲线胞腔复形. 则 $S^n \setminus X$ 的所有模 2 Betti 数有限并且满足 Alexander 对偶定理

$$\begin{aligned} \dim H_p(X;\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) &= \dim H_{n-p-1}(S^n \setminus X;\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \\ &\qquad \text{当 } 1 \leqslant p \leqslant n-2, \\ \dim H_0(X;\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) &= \dim H_{n-1}(S^n \setminus X;\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) + 1, \quad (20) \\ \dim H_{n-1}(X;\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) &= \dim H_0(S^n \setminus X;\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) - 1. \end{aligned}$$

这个定理以 Jordan 分割定理以及其推广 Jordan-Brouwer 分割定理为其特款. 有关它的现代的一般的陈述和证明, 读者可参见 [Mau], [Mu 7] 或 [Gr-H].

Alexander 的这篇文章一方面成为许多拓扑学家推广同调论于更广的空间的起点, 他们有 Vietoris, Alexandroff, Lefschetz, Pontrjagin 和 Čech 等人. 另一方面导致了 Lefschetz 引进相对同调的概念, 首见于 1928 年的 [Le 6]. 设 K 是一个有限的欧氏单纯复形, L 是 K 中某些单形之并. K 中一个 p 维链 C, 若其边缘 ∂C 是 L 中单形之线性组合, 则称 C 为一个模 L 的 p 维闭链; K 中一个模 L 的 p 维闭链 C, 若是某个$(p+1)$维链的边缘与 L 中单形的一个线性组合之差,则称 C 为模 L 同调于 0. 于是 Lefschetz 定义了 K 的模 L 相对同调模 $H_p(K,L)$. 当 L 是 K 的一个子复形时,他证明了 K 的模 L 相对同调模只与 $K \setminus L$ 的拓扑有关. 注意, 这里首次出现了后来被称为 "切除定理" 的事实. Lefschetz 还研究了 K 的同调, L 的同调和 K 的模 L 的相对同调之间的关系 [Le 8], 后来被人们表述为正合序列的形式.

第五章　组合同调的进一步发展

组合的同调理论自 1926 年以后，由于抽象代数的加入而得到巨大发展，出现了同调群（模及环）概念. 同时人们出于不同的动机，希望将组合拓扑学的同调推广. 一方面是从奇异链发展为奇异同调群. 另一方面利用覆盖作逼近，而发展出投影谱，最终建立了 Čech 同调群.

1930 年 de Rham 定理的发表是拓扑学历史上重要事件之一. 它对于上同调的出现以及十几年后的束论的建立，应该是一个前奏，其影响值得深思.

§5.1　群在同调论中的出现

直到 1925 年，同调论是用 Betti 数和挠系数来表述的. 当时，代数学正在完成由古典向抽象的蜕变. E. Nöther 这位 20 世纪最了不起的女数学家，公理化代数学的奠基人之一，十分关心拓扑学的发展，并对 P. S. Alexandroff，P. S. Urysohn 和 H. Hopf 等人有深刻的影响. 1926 年她发表了论文［Nö］，第一次提出用群来表述同调论. 从此，同调的研究便以同调群，同调模以及同调环等等为对象，组合拓扑学实现代数化而成为代数拓扑学，抽象代数的一套方法论成了拓扑学的基本哲学武器. Hopf

随即于 1928 年［Hop 4］应用同调模．Vietoris 则于 1926 年［Vi 1］独立地抛弃矩阵，以对较单纯复形更一般的空间定义同调，并对单纯复形采用 $H_j=\mathrm{Ker}\ \mathbf{b}_j/\mathrm{Im}\ \mathbf{b}_{j+1}$ 为同调群之定义．

同调群（模）的定义立即被推广到任意的模序列 $C.=(C_j)_{j\geqslant 0}$ 带有同态 $\mathbf{b}_j(j\geqslant 0)$，满足条件 $\mathbf{b}_j: C_j\to C_{j-1}$，$\mathbf{b}_0=0$ 及 $\mathbf{b}_{j-1}\circ\mathbf{b}_j=0$ 对 $j\geqslant 1$．现在常称系统 $C.=(C_j,\mathbf{b}_j)$ 为一个链复形．Mayer 于 1929 年［May］首先考虑过这种链复形，其中 C_j 均具自由的有限基，他称为“复形”．

运用这个新概念，Mayer 研究了由 Vietoris 提出的问题：设每个 C_j 有一个基，分成两个子集 B_j^1 和 B_j^2 之并，C_j^1，C_j^2 和 C_j^3 分别由 B_j^1，B_j^2 和 $B_j^1\cap B_j^2$ 生成．Mayer 探讨了 H_j^1，H_j^2 和 H_j^3 之间的关系．进而在 1930 年 Vietoris［Vi 2］完成了这项研究．今天被称为 Mayer-Vietoris 序列而被广泛应用．

§5.2　奇异同调论

在单纯复形同调论的早期，由于连续体被剖分成离散的块状后，不变性的论证遇到了严重的困难．早在 1907 年 Dehn 和 Heegaard 在他们的百科全书论文［D-H］中，就陈述了奇异的胞腔．由于他们知道 Peano 曲线一类的连续映射的像能占有面积和高维的体积而产生的麻烦，所以他们的概念不只包括连续映射 f 及其像 $f(E)$，而且也包括胞腔 E 本身．不过他们并没有用这个概念来进行推理．而到 1915 年，Alexander 在［Al 1］中才用奇异单形来证明同调不变性．他用奇异单形的线性组合来定义一种新的链，奇异链，并配以边缘算子以得新的同调模，它与三角剖分无关．只要能证明这个同调模与任意一个三角剖分之同调模同构，则不变性问题便解决．Alexander 论文中的含糊之处在

Veblen [V 2], van der Waerden [W 1] 和 Lefschetz [Le 8] 中得到部分改进，而在 1933 年 Lefschetz 的短文 [Le 9] 中才得到澄清.

由于 Lefschetz 在 [Le 9] 中论及空间 X 的奇异单形时，空间 X 的特殊性质并未被用到，因此其定义可适用于任何拓扑空间. 但是，其中仍有缺点，直到 1943 年由 Eilenberg 在 [Ei 3] 中才克服. Eilenberg 的定义今日已被普遍采纳，读者可参考 [Gr-H] 或 [Sp 2].

§ 5.3 Čech 同调

奇异同调不适宜于将 Alexander 对偶定理推广到 S^n 中的任意紧子集 X. 1925 年，Alexandroff 在 [Af 2] 中举了一个简单的例子：考虑 $\mathbf{R}^2$ 中由满足

$$0<x<2/3\pi,\ \sin\frac{1}{x}<y<2$$

的 (x,y) 组成的开集 U, X 是其边界. U 和 $\overline{U}$ 在 $\mathbf{R}^2$ 中的余集都是连通开集. 因此 $H_0(\mathbf{R}^2\setminus X;\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})\cong(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2$. 但是 X 中任一奇异单形均不与由 $0<x<a$ 及 $y=\sin\dfrac{1}{x}$ 定义的 X 的某个开子集 V 相交，由此知 $H_1(X;\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})=0$. 则 Alexander 对偶定理的关系，即 § 4.3 的(20)式，不成立.

这促使 Alexandroff [Af 1], Vietoris [Vie 1] 和 Lefschetz [Le 8] 独立地对于紧度量空间去寻求新的同调模的定义. 他们共同的出发点是，用一序列的单纯复形去逼近给定的紧度量空间. 这个办法可追溯到 Brouwer.

1926 年 Alexandroff [Af 1] 的做法比较重要，与 Lebesgue 的维数概念的做法有关. 设 X 是一个紧度量空间，对于 X 的任

一有限开覆盖 $\mathscr{U}=(U_\alpha)$，配以其纳复(nerve)$N(\mathscr{U})$，为一个有限的组合复形，其顶点为 U_α，其 p 维单形为有非空交的$(p+1)$个子集组$\{U_{\alpha_0},U_{\alpha_1},\cdots,U_{\alpha_p}\}$. X 的有限开覆盖 $\mathscr{U}'=(U'_\beta)$称为细于 $\mathscr{U}$，若每个 U'_β 被包含于某个 U_α 中；对任意 β 取这样的一个 α，记作 $\alpha=\varphi(\beta)$，则映射 $U'_\beta \mapsto U_{\varphi(\beta)}$是将 $N(\mathscr{U}')$映入 $N(\mathscr{U})$的一个单纯映射；诱导同调同态 $\varphi_*:H.(N(\mathscr{U}'))\to H.(N(\mathscr{U}))$与 φ 之选取无关. Alexandroff 取 X 的一个有限开覆盖序列$(\mathscr{U}_n)$，使得 $\mathscr{U}_{n+1}$是 $\mathscr{U}_n$ 的加细，且 $\mathscr{U}_n$ 中开集之直径的最大者随 n 之增大而趋于 0，他称之为一个投影谱. 他证明 $H_p(N(\mathscr{U}_n);\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$作为向量空间的维数趋于一个极限，并与投影谱之选取无关.

这个想法在随后的几年中围绕着三个新的主题发展：(1) 顺向极限与逆向极限；(2) 同调群中的拓扑；(3) 交换群之对偶概念. 而在 1935 年前后完成了所谓 Čech 同调.

捷克拓扑学家 E. Čech 于 1932 年发表了 [Cec 1]，对很一般的拓扑空间 X 定义同调群(以 $\mathbf{Q}$ 为系数). 他不是采用投影谱，而是采用 X 的所有的有限开覆盖 $\mathscr{U}$，它们按加细关系组成一个有向集合. 而纳复 $N(\mathscr{U})$的对每个 p 的同调群 $H_p(N(\mathscr{U});\mathbf{Q})$组成其上的一个逆向系统. Čech 引进了现今称之为逆向极限的概念，而对空间 X 定义了有理数域 $\mathbf{Q}$ 上的 p 维同调向量空间 $\check{H}_p(X;\mathbf{Q})$，即以 $\mathbf{Q}$ 为系数群的 p 维同调群，现在称为 Čech 同调群，同时也有相对同调. 读者可参考[Ei-S 2].

§5.4 de Rham 定理

在 Poincaré 的 Analysis Situs [P 2] 的第 7 节中，他推广了 Riemann 和 Betti 有关在一个 C^1 的 n 维流形上的微分形式 (dif-

ferential form）的积分的周期（periods）与 Betti 数之间的关系．他考虑的是我们今天所说的闭形式，虽然那时尚未引入外微分（exterior differential）算子 d，但他用可积性条件来界定．一个闭的 m 形式沿着无边的 m 维子流形上的积分值称为它的周期．请注意，那时一般的 Stokes 公式尚未明确表出，但他陈述了下面的重要结果：任一闭的 m 形式在不同的 m 维闭子流形上的周期，均可表示为某些周期的整系数线性组合，这些周期最多有 P_m-1 个．这里 Poincaré 的 Betti 数 P_m 比后来采用的多 1．这个有关微分形式的整体性质的结论随后似乎无人讨论，直到法国数学家 E. Cartan 于 1922 年写下了著名的书［CE 1］，在其中开始考虑整体性质，特别是，他证明在 $\mathbf{R}^n$ 中任意闭的 C^1 的 p 形式（$p>1$）必是正合的，即是某个（$p-1$）形式的外微分．事实上，这个结果已被 Volterra 于 1889 年证明，但被遗忘．老 Cartan 称这个事实为“Poincaré 引理之逆”，因为他称 $d\circ d=0$ 为 Poincaré 引理．他同时注意到，这个结论在一般的流形上不成立．例如 S^2 上每个 2 形式都是闭的，但不是正合的．然后他于 1927 年至 1935 年之间，做了一系列涉及 Lie 群和齐性空间的整体性质的工作，其中拓扑性质最引人注目．在这些工作中，他不断地运用外微分形式，这已成他的论著的“商标”了．很有可能当老 Cartan 熟悉了同调论以后，被边缘运算的公式 $\partial\circ\partial=0$ 与外微分运算的公式 $d\circ d=0$ 之类似所震惊．从而他在研究紧 Lie 群时，心中就在考虑对任意 $p\geqslant0$，闭的 p 形式在正合意义下线性无关的最大数，即取闭的 p 形式 ω_i 的最大数目，使得任何不全为 0 的实系数线性组合 $\sum_i\lambda_i\omega_i$ 都不是正合的．他猜想对于可定向的 n 维 C^1 流形 M，该数等于 M 之 Betti 数 b_p．

设 M 有一个 C^1 三角剖分，c 为任意 p 维闭链，ω 为任意闭的 C^1 p 形式，定义一个双线性映射如下

$$(c,\omega)\mapsto\langle c,\omega\rangle=\int_c\omega. \tag{1}$$

若 ω 是正合的，即 $\omega=d\tau$，τ 是某个 $(p-1)$ 形式，则由 Stokes 公式 $\int_c\omega=\int_c d\tau=\int_{\partial c}\tau=0$，即 $\langle c,\omega\rangle=0$. 设 M 的 Betti 数是有限的，E. Cartan1928 年在[CE 2]中猜想：

I. 若闭的 p 形式 ω 使得对所有的 p 维闭链 c 有 $\langle c,\omega\rangle=0$，则 ω 是正合形式；

II. 若 p 维闭链 c 使得对所有 p 闭形式 ω 有 $\langle c,\omega\rangle=0$，则 c 是边缘链.

瑞士人 de Rham 在他的学位论文［Rh 1］中证明了这两个命题，从而证明了，对任意 $p\geqslant 0$，在正合意义下 p 闭形式线性无关的最大数，确实等于 M 的 p 维 Betti 数 b_p. 此后这个结论称为 **de Rham 定理**.

在证明中，de Rham 反复地运用"Poincaré 引理之逆"，这是整个证明之精髓. 如今"Poincaré 引理之逆"被有些人误称为"Poincaré 引理"，应当纠正. 此外，de Rham 当时为处理积分时比较方便，用到的三角剖分是方体剖分. 在单纯复形剖分情形的简化证明，读者可参阅［Si-T］及其中译本. 一个运用束论的证明可参阅［War］，不过这些都采用了上同调的语言.

de Rham 自己在 1950 年以前并未将他的定理用上同调语言表述. 但是从 1935 年起，de Rham 就试图定义新的对象，包括 p 维链和 p 形式作为特例，他称这种新对象为 p 维流. 而到了 1950 年，他采用了 S. L. Sobolev 和 L. Schwartz 建立的广义函数（分布），给出一种更普遍的流的定义［Rh 5］. 此时他仍未采用上同调语言.

但是，容易想象，上同调概念的产生肯定与 de Rham 定理的证明和发表有关系. de Rham 定理不仅是同调论历史上的一块里程碑，而且是拓扑学，分析学和几何学之间的关系，或者整体分析学的历史上的一块里程碑.

§ 5.5 上同调概念

在 1935 年莫斯科举行的国际拓扑学会议上，Alexander 和 A. N. Kolmogoroff 两人独立地提出上同调概念和乘积概念，见于两篇回忆录 [Hop 14] 和 [Why 16]. Kolmogoroff 是苏联最伟大的数学家之一，但他参加拓扑学会议并在会上提出上同调和乘积理论，出乎与会者之意料. 在他讲完后，Alexander 当场宣布，自己也得到了同样的定义和结果. 据 H. Whitney 的回忆 [Why 16]，他们两人都带着印好的文章，我想，应当是 [Ko 1, 2] 及 [Al 12, 13].

按 [Al 12]，设 K 是一个有限的或无限的组合复形，$S_p(K;A)$是系数在一个离散交换群 A 中的有限 p 维链所成之群. Alexander 考虑定义在 $S_p(K;A)$上所有取值于 A 之对偶或特征标群$\hat{A}$(即 $\hat{A}$ 为从 A 到 $\mathbf{T}=\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ 中所有同态所成之群)中的线性函数,称为 p 维上链,所成的群 $S^p(K;\hat{A})$. 如果 $z_p\in S_p(K;A)$ 为 $z_p=\sum\alpha_j\sigma_p^j$,其中 $\alpha_j\in A$, $\alpha_j=0$ 除有限个 j 外. 若 $z^p\in S^p(K;\hat{A})$使得 $z^p(\sigma_p^j)=\beta_j\in\hat{A}$,则

$$\langle z_p, z^p\rangle = \sum\nolimits_j\langle\alpha_j,\beta_j\rangle\in\mathbf{T}=\mathbf{R}/\mathbf{Z}. \qquad (2)$$

Alexander 甚至称$\langle z_p, z^p\rangle$为"z^p 在 z_p 上之积分",这似乎暗示出他从微分形式得到的启发. 而边缘运算 $\partial_p: S_p(K;A)\to S_{p-1}(K;A)$之相伴运算为连续的同态 $d_{p-1}: S^{p-1}(K;\hat{A})\to S^p(K;\hat{A})$, Alexander 称为 derivative,现今称为上边缘(coboundary)运算. Alexander 还指出可取 $A=\mathbf{Z}$, $\hat{A}=\mathbf{R}$,其中 A 与 $\hat{A}$ 之双线性映射换成乘法,亦可作类似定义. 在[Al 13]中,Alexander 不采用对偶(特征标群),而对任意交换环 Λ 直接定义 p 维上链 Λ 模为所有群

同态 $S_p(K;\Lambda)\to\Lambda$ 所成之 Λ 模，即 $S^p(K;\Lambda)=\mathrm{Hom}(S_p(L;\Lambda),\Lambda)$.

自然立即希望对于拓扑空间来建立上同调概念. 对奇异理论，这是由 Eilenberg 于 1944 年完成的 [Ei 4]. 他没用到任何新概念，取空间 X 的奇异 p 维链 $\mathbf{Z}$ 模 $S_p(X;\mathbf{Z})$，然后对任意交换群 G，取奇异 p 维上链群为

$$S^p(X;G)=\mathrm{Hom}(S_p(X;\mathbf{Z}),G), \tag{3}$$

及上边缘运算 $\delta_p:S^p(X;G)\to S^{p+1}(X;G)$为

$$(\delta_p f)(z)=f(\partial_{p+1}z). \tag{4}$$

对 $z\in S_{p+1}(X;\mathbf{Z})$，显然有 $\delta_p\circ\delta_{p-1}=0$. 因此 p 维上边缘群 $B^p(X;G)=\mathrm{Im}\ \delta_{p-1}$是含于 p 维上闭链群 $Z^p(X;G)=\mathrm{Ker}\ \delta_p$ 之中. 商群 $Z^p(X;G)/B^p(X;G)$，记作 $H^p(X;G)$，称为空间 X 的系数在群G 中或以G 为系数群的p 维(第 p 个)奇异上同调群. 相对上同调群可类似地定义. 拓扑空间之间的连续映射和系数群之间的同态均诱导出上同调群之间的同态. 还应注意的是，可以定义空间 X 的具紧支的上同调群$H_c^p(X;G)$. 读者可参看[Gr-H].

对于 Čech 理论，亦可建立上同调概念. 设 $\mathscr{U}$ 是空间 X 的任意有限开覆盖，其纳复 $N(\mathscr{U})$是有限组合复形. 取任意交换群 G 为系数群，得上同调群 $H^p(N(\mathscr{U});G)$组成的一个顺向系统，其顺向极限

$$\check{H}^p(X;G)=\varinjlim H^p(N(\mathscr{U});G) \tag{5}$$

称为空间 X 的系数在群G 中或以G 为系数群的基于有限开覆盖的 Čech 上同调群. 美国数学家 N. Steenrod 证明了 [Ste 1]，若 X 是一个紧空间，并且 G 是一个离散群，则有一个自然同构

$$\check{H}_p(X;\hat{G})\cong(\check{H}^p(X;G))^{\wedge}, \tag{6}$$

右边是 $\check{H}^p(X;G)$的 Pontrjagin 对偶，左边是 X 的系数在 G 的紧对偶$\hat{G}$ 中，或以 G 的紧对偶$\hat{G}$ 为系数群的 Čech 同调群.

亦可定义空间 X 的以G 为系数群的基于任意开覆盖的 Čech

上同调群，它一般是不同于上面定义的 $\check{H}^p(X; G)$. 读者可以参考［Ei-S 2］.

Alexander 还在 1935 年［Al 13］提出另一个定义上同调群的办法，后来被 E. Spanier 于 1948 年推广和简化，于今称为 Alexander-Spanier 上同调［Sp 1, 2］. 设 X 是任意拓扑空间，G 是任意交换群. 群 $C^p(X; G)$ 由所有映乘积空间 $X^{p+1} = \underbrace{X \times \cdots \times X}_{p+1}$ 到 G 的映射组成，是一个交换群. 其中子群 $C_0^p(X; G)$ 是由那些在 X^{p+1} 的对角线的某邻域内为 0 之映射组成. 上边缘运算 δ_p: $C^p(X;G) \to C^{p+1}(X;G)$ 为

$$\delta_p f(x_0, x_1, \cdots, x_{p+1}) = \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k f(x_0, \cdots, \hat{x}_k, \cdots, x_{p+1}). \tag{7}$$

易证 $\delta_{p+1} \circ \delta_p = 0$. 此外，$\delta_p(C_0{}^p(X;G)) \subset C_0{}^{p+1}(X;G)$，故过渡到商群 $\overline{C}^p(X;G) = C^p(X;G)/C_0{}^p(X;G)$ 得上边缘运算 $\overline{\delta}_p$: $\overline{C}^p(X;G) \to \overline{C}^{p+1}(X;G)$，仍然有 $\overline{\delta}_{p+1} \circ \overline{\delta}_p = 0$. 对应的上同调群记为 $\overline{H}^p(X;G)$，称为空间 X 的以 G 为系数的 Alexander-Spanier 上同调群. 相对上同调群亦可类似定义. 这种上同调对仿紧空间而言，有所谓绷紧性(tautness).

§ 5.6 乘积运算

上同调概念出现的当时，真正使拓扑学家惊喜的是，对任意有限的欧氏单纯复形 K，能够定义上同调类之间的乘法，即可定义双线性映射

$$H^p(K;\Lambda) \times H^q(K;\Lambda) \to H^{p+q}(K;\Lambda), \tag{8}$$

其中 Λ 是一个交换环，从而若记 $H^*(K;\Lambda) = \bigoplus_p H^p(K;\Lambda)$ 为各

上同调群之直和，则 $H^*(K;\Lambda)$按分量之乘法成为有分次结构的一个结合环. 注意，当 K 是一个可定向的 n 维紧的组合流形，并且 Λ 是一个域时，由 Poincaré 对偶定理以及 $H^p(K;\Lambda)$与 $H_p(K;\Lambda)$ 是互为 Λ 上的对偶空间可得到一个自然同构

$$
\begin{aligned}
H^p(K;\Lambda) &\cong (H_p(K;\Lambda))^* \\
&\cong H_p(K;\Lambda) \to H_{n-p}(K;\Lambda).
\end{aligned}
\tag{9}
$$

据此再按相交性

$$
H_{n-p}(K;\Lambda)\times H_{n-q}(K,\Lambda)\to H_{n-p-q}(K;\Lambda) \tag{10}
$$

可得一个双线性映射(8). 而现在(8)可对任意有限的欧氏单纯复形 K 实现！上节已提到，这是由 Alexander 和 Kolmogoroff 在 1935 年莫斯科国际拓扑学会议上独立地提出的.

Alexander 在 [Al 13] 中的定义有毛病，而在 [Al 14] 中他接受了 Čech [Cec 5] 和 Whitney 的建议 [Why 16] 后作了改进，后来 Whitney 在 [Why 7] 中又独立地讨论并建议了“上积(cup product)”这一名称和记号 $a\cup b$. 现用 Whitney 的记号介绍如下. 先给欧氏单纯复形 K 的所有顶点任意顺序 ω，定义上链之间的一个双线性映射

$$
S^p(K;\Lambda)\times S^q(K;\Lambda)\to S^{p+q}(K;\Lambda) \tag{11}
$$

写成$(f,g)\mapsto f\cup g$，对任意有序$(p+q)$维单形$(x_0,\cdots,x_p,x_{p+1},\cdots,x_{p+q})$，即顶点满足在 ω 中的次序 $x_0\prec x_1\prec\cdots\prec x_{p+q}$，令

$$
\begin{aligned}
&(f\cup g)(x_0,\cdots,x_{p+q}) \\
&= f(x_0,\cdots,x_p)g(x_p,x_{p+1},\cdots,x_{p+q}).
\end{aligned}
\tag{12}
$$

则有

$$
\delta_{p+q}(f\cup g)=(\delta_p f)\cup g+(-1)^p f\cup(\delta_q g). \tag{13}
$$

从而若 f，g 均为上闭链，则 $f\cup g$ 亦为上闭链，并且 $f\cup g$ 的上同调类只与 f 和 g 之上同调类 a 和 b 有关，记作 $a\cup b$. 并且可以证明 $a\cup b$ 与 K 上的顶点顺序 ω 的选取无关. 由此定义了线性映射

$$
H^p(K;\Lambda)\times H^q(K;\Lambda)\to H^{p+q}(K;\Lambda), \tag{14}
$$

$$(a,b)\mapsto a\cup b,$$

并有交错交换性

$$b\cup a=(-1)^{pq}a\cup b. \tag{15}$$

由此，$H^*(K;\Lambda)$按分量之乘法成为有分次结构的一个交错交换的结合环.

这些定义立即在［Ei 3］中被 Eilenberg 延拓到任意空间的奇异上同调. 另外它们还可以推广到系数群带有双线性映射 φ: $G\times G'\to G''$的情形

$$H^p(K;G)\times H^q(K;G')\to H^{p+q}(K;G''). \tag{16}$$

Čech［Cec 5］引进另一个双线性映射

$$H_{p+q}(X;\Lambda)\times H^p(X;\Lambda)\to H_q(X;\Lambda). \tag{17}$$

Whitney 在［Why 7］中也独立地引进并建议了“卡积（cap product)”这一名称和记号（u, a）$\mapsto u\cap a$. 与上面类似，先取定 K 的顶点顺序 ω. 定义双线性映射

$$S_{p+q}(K;\Lambda)\times S^p(K;\Lambda)\to S_q(K;\Lambda), \tag{18}$$

为对任意有序$(p+q)$维单形$(x_0,\cdots,x_{p+q})$和任意 p 维上链 f，令

$$(x_0,\cdots,x_{p+q})\cap f=f(x_0,\cdots,x_p)(x_p,\cdots,x_{p+q}), \tag{19}$$

则有

$$\partial_q(z\cap f)=(-1)^p(\partial_{p+q}z\cap f)-(z\cap\delta_p f). \tag{20}$$

从而若 z 是闭链而 f 是上闭链时，$z\cap f$ 是闭链，并且其同调类只与 z 的同调类 u 和 f 的上同调类 a 有关，记作 $u\cap a$. 而且可以证明 $u\cap a$ 与 K 的顶点的顺序 ω 的选取无关. 由此定义了双线性映射（17）.

在［Ei 3］中，卡积亦被 Eilenberg 推广到奇异同调和奇异上同调.

有关上积的进一步推广是 Steenrod 定义的平方运算和约化幂等上同调运算，见第十五章.

第六章　同调代数的诞生

同调从20世纪20年代中期，经由Nöther介绍，将群，模及环等概念及它们的同态引人，而形成代数拓扑学，并得以蓬勃发展．到了30年代末，已积累了大量成果，拓扑学家们逐渐认识到一个空间的同调与上同调性质的表述可以分为两个阶段：第一阶段是有关链复形的纯粹代数学的讨论；第二阶段是运用代数学的理论于拓扑空间．于是自觉地从拓扑学的定理中提炼出代数学的定理，这导致在40年代中期诞生了一门新的代数学分支——同调代数．同时，范畴和函子的概念和语言获得运用．重要参考书有［CH-Ei］．

§6.1　正合序列的出现

在1941年W. Hurewicz的一篇没有详细证明的短文[Hur 2]中，首次将上同调群之间的同态组成一个序列

$$\cdots\longrightarrow H^q(A)\xrightarrow{j^*}H^q(B)\xrightarrow{\delta}H^{q+1}(A\setminus B)\xrightarrow{v} H^{q+1}(A)\xrightarrow{j^*}H^{q+1}(B)\longrightarrow\cdots \tag{1}$$

其中A是局部紧空间，B是A的一个闭子集；上同调群之系数均为$\mathbf{Z}$；$j:B\to A$是包含映射，v是将$A\setminus B$上的上闭链的上同

调类映成A中它的一个扩张的类；δ定义为：若$\bar{z}$是B中一个q维上同调类，$z\in\bar{z}$是一个代表上闭链，将它视为A中一个q维上链x在B上之限制，则x的上边缘$\delta_q x$在B上的限制等于0，因此可视为$A\setminus B$中的一个$(q+1)$维上闭链，其在$H^{q+1}(A\setminus B)$中的上同调类记成$\delta\bar{z}$. Hurewicz的重要结论是，序列中每一同态之像正好是下一同态之核．后来，人们称这个性质为正合性(exactness)．这是第一次出现了长正合序列．

与此同时，由于同伦群和纤维丛理论的发展（这些都有专章论及），B. Eckmann [E 1] 和 C. Ehresmann 及 J. Feldbau [Eh-F] 都在1941年独立地建立了纤维空间的底空间，全空间和纤维的同伦群组成的一个正合序列，被称为纤维空间的同伦正合序列．

到了1945年，Eilenberg 和 Steenrod 在 [Ei-S 1] 中建立同调论的公理化理论时，提出了对任意拓扑空间X和其闭子集A，同调群及其同态有正合序列

$$\begin{aligned}\cdots\to H_q(X)\to H_q(X,A)\to H_{q-1}(A)\to H_{q-1}(X)\to\\ \cdots\to H_0(X,A)\to 0.\end{aligned}\tag{2}$$

这是作为一条公理提出的，并未指定具体同调为何种．

在同一年，老 Cartan 的儿子 H. Cartan 发表了他的第一篇代数拓扑学的论文 [CH 1]，对局部紧空间E和其闭子集$F\neq E$，以及$E\setminus F$，得到一个同调序列．其中对局部紧空间X，若X不紧，令$\dot{X}=X\cup\infty$为X的 Alexandroff 一点紧化．并且取系数群为$\mathbf{T}=\mathbf{R}/\mathbf{Z}$的同调群$\Gamma^q(X)$为 Čech 相对同调$\check{H}_q(\dot{X},\infty;\mathbf{T})$；若$X$是紧的，则取$\Gamma^q(X)$为 Čech 同调$\check{H}_q(X;\mathbf{T})$. H. Cartan 证明了存在同态$\partial$：$\Gamma^q(E\setminus F)\to\Gamma^{q-1}(F)$使得序列

$$\begin{aligned}\cdots\longrightarrow\Gamma^q(F)\xrightarrow{j_*}\Gamma^q(E)\xrightarrow{g_*}\Gamma^q(E\setminus F)\\ \xrightarrow{\partial}\Gamma^{q-1}(F)\xrightarrow{j_*}\Gamma^{q-1}(E)\longrightarrow\cdots\end{aligned}\tag{3}$$

是正合的．他先对有限欧氏单纯复形证明，然后过渡到逆向极

限. 重要的是，他从这个正合序列演绎出所谓 Mayer-Vietoris 正合序列，而将 Mayer 和 Vietoris 的工作表述得更为适用.

还应指出，“正合序列”一词是 J. Kelley 和 E. Pitcher 在 1947 年的文章［K-P］中提出来的. 他们发现这个概念对任意的交换群和群同态都有意义，而且此前所考虑到的有关同调和上同调的正合序列，都是一个纯粹的代数结果应用于 Mayer 意义下的链复形而得. 一个链复形是一序列交换群 $C_. = (C_j)_{j\geqslant 0}$，带有边缘同态 ∂_j：$C_j \to C_{j-1}$，使得 $\partial_0 = 0$ 且 $\partial_{j-1}\circ\partial_j = 0$ 对 $j \geqslant 1$. 两个链复形之间的一个同态或链变换 $f_.$：$C_. \to C'_.$，是一序列同态 f_j：$C_j \to C'_j$，使得 $f_{j-1}\circ\partial_j = \partial'_j\circ f_j$. 由此可导出同调群之间的同态 $H_j(f_.) = f_{j_*}: H_j(C_.) \to H_j(C'_.)$. 设有如下形的链复形及链变换组成的序列

$$0 \longrightarrow A_. \xrightarrow{f_.} B_. \xrightarrow{g_.} C_. \longrightarrow 0. \tag{4}$$

我们说它是正合的，如果对于每个 $j \geqslant 0$ 而言

$$0 \longrightarrow A_j \xrightarrow{f_j} B_j \xrightarrow{g_j} C_j \longrightarrow 0 \tag{5}$$

是正合的. 这时，我们称（4）为一个短正合序列. 于是存在所谓连接同态

$$\Delta_n : H_n(C_.) \longrightarrow H_{n-1}(A_.), \tag{6}$$

使得同调群及同态所成的长的（无限）序列

$$\begin{gathered}\cdots \longrightarrow H_n(A_.) \xrightarrow{H_n(f_.)} H_n(B_.) \xrightarrow{H_n(g_.)} \\ H_n(C_.) \xrightarrow{\Delta_n} H_{n-1}(A_.) \longrightarrow \cdots\end{gathered} \tag{7}$$

是正合的. 同态 Δ_n 定义为对闭链 $z \in C_n$，存在一个链 $y \in B_n$，使得 $z = g_n(y)$，由 $0 = \partial_n z = g_{n-1}(\partial_n y)$ 及短正合性，知存在 $x \in A_{n-1}$，使得 $\partial_n y = f_{n-1}(x)$，并且 $\partial_{n-1}x = 0$，即 x 是一个闭链，它在 $H_{n-1}(A_.)$ 中的同调类 $\bar{x}$ 只与 z 的同调类 $\bar{z}$ 有关. 我们令 $\Delta_n \bar{z} = \bar{x}$.

上述链复形概念中 $j \geqslant 0$ 的限制不是必要的，可以取消，即

j 可跑遍整数集 **Z**. 若记 $C^{\cdot}=(C^j)$，其中 $C^j=C_{-j}$，且上边缘运算 δ_j：$C^j\to C^{j+1}$ 即为 ∂_{-j}，则得一个上链复形. 所有东西都一样，区别仅是名词术语不同. 因此，有关链复形的结果，立即可转移成为有关上链复形的结果. 从而由上链复形的短正合序列

$$0\longrightarrow C^{\cdot}\xrightarrow{g^{\cdot}}B^{\cdot}\xrightarrow{f^{\cdot}}A^{\cdot}\longrightarrow 0 \tag{8}$$

导出上同调群及同态所成的长的（无限）正合序列

$$\begin{aligned}\cdots\longrightarrow H^n(C^{\cdot})\xrightarrow{H^n(g_{\cdot})}H^n(B^{\cdot})\xrightarrow{H^n(f^{\cdot})}\\ H^n(A^{\cdot})\xrightarrow{\Delta^n}H^{n+1}(C^{\cdot})\longrightarrow\cdots\end{aligned} \tag{9}$$

一些很有用的引理被提出. 其中有著名的"五引理"，设有群及同态的交换图表

$$\begin{array}{ccccccccc} G_1 & \longrightarrow & G_2 & \longrightarrow & G_3 & \longrightarrow & G_4 & \longrightarrow & G_5\\ \downarrow{\scriptstyle u_1} & & \downarrow{\scriptstyle u_2} & & \downarrow{\scriptstyle u_3} & & \downarrow{\scriptstyle u_4} & & \downarrow{\scriptstyle u_5}\\ G_1' & \longrightarrow & G_2' & \longrightarrow & G_3' & \longrightarrow & G_4' & \longrightarrow & G_5' \end{array} \tag{10}$$

两横行均正合，于是（A）若 u_1 是满射，u_2 和 u_4 是单射，则 u_3 是单射；（B）若 u_5 是单射，u_2 和 u_4 是满射，则 u_3 是满射. 特别，若 u_1，u_2，u_4，u_5 是同构，则 u_3 是同构. 这是 Eilenberg-Steenrod 的书［Ei-S 2］中首先提出来的.

§6.2 函子⊗和 Tor

有关同调概念，Poincaré 最初是采用整系数链. 在 1908 年，Tietze［Ti］首先采用模 2 同调，并随后被 Alexander 和 Veblen 于 1913 年在［Al-V］中采纳，即链的系数群为整数模 2 群 **Z**/2**Z**. 后来，Alexander 在 1926 年又采用了更一般的整数模 m 群为系数群［Al 8］. 而 S. Lefschetz 在 1928 年发现，Poincaré

的"带除法的同调"其实是系数取自有理数域 $\mathbf{Q}$ [Le 6]. 而以上各种不同的系数的选取，并未得到整系数同调未能获得的不变量，这是耐人寻味的.

1935 年，Čech 开始了依赖系数群 G 的同调群 $H_p(X; G)$ 的研究 [Cec 5]. 他虽局限于研究 X 是一个可数的局部有限的组合复形的情形，然而他的处理是完全代数化的，即对于一个自由的链复形 $C.$ 和一个任意的离散的交换群 G，他研究了同调群 $H.(C.; G)$和同调群 $H.(C.; \mathbf{Z})$之间的关系. Alexandroff 和 Hopf 也在他们著名的书 [Af-H] 中，对有限复形作了相同的研究.

那时还没有张量积这个概念，Čech 的推理和结果，都是用生成元和它们之间的线性关系来表述. 不久，在 1938 年，Whitney 在 [Why 8] 中定义了张量积以后，Čech 的定理便可以用内蕴的表述而清晰简练. 但第一个完全的用张量积来叙述，是在 Eilenberg-Steenrod 的名著 [Ei-S] 的第 161 页的习题中，不过其上同调的公式里的 Ext（$H_q(K)$, G）中的 q 应为 $q-1$. 这就是著名的万有系数定理，现在很多教科书都（或用不同方式）讲到，如 [Sp 2], [Do 3], [Gr-H], [Mu 8] 等.

我们采用张量积来叙述 Čech 的推理和成果. 设 $C. = (C_j)$是自由的 $\mathbf{Z}$ 模链复形，C_p 的子 $\mathbf{Z}$ 模 Z_p 是由 p 维闭链组成的，而 B_p 是由 p 维边缘组成的. 因为∂_p: $C_p \to Z_{p-1}$的核是 Z_p，像是 B_{p-1}，它们都是自由的，因此 C_p 中有一个自由子模 F_p（不唯一），使得 $C_p = Z_p \oplus F_p$. 设 G 为任意交换群. 以 G 为系数的链复形 $C. \otimes G$ 是$(C_p \otimes G)$，其中 p 维链群 $C_p \otimes G$ 定义为$R(C_p, G)/Y(C_p, G)$，$R(C_p, G)$为由所有偶对(c, g)生成的自由 $\mathbf{Z}$ 模，$c \in C_p$ 而 $g \in G$，$Y(C_p, G)$ 为 $R(C_p, G)$ 的包含形如 $(c_1+c_2, g)-(c_1, g)-(c_2, g)$, $(c, g_1+g_2)-(c, g_1)-(c, g_2)$, $(rc, g)-r(c, g)$及$(c, rg)-r(c, g)$的元素在内的最小的子模. p 维链群可写成$C_p \otimes G = (Z_p \otimes G) \oplus (F_p \otimes G)$，其边缘运算为

$\partial_p \otimes 1: C_p \otimes G \to Z_{p-1} \otimes G$，其核包含着 $Z_p \otimes G$，但可能更大，因此写成 $Z_p(C.\otimes G) = Z_p \otimes G \oplus Z_p'$，其中 Z_p' 为$\mathrm{Ker}(\partial_p \otimes 1) \cap (F_p \otimes G)$. 同时$B_p(C.\otimes G) = \mathrm{Im}(\partial_{p+1} \otimes 1) \subset Z_p \otimes G$. 记 $C.$ 的铜调群为 H_p，$(C_p \otimes G)$ 的同调群为 $H_p(C.;\ G)$. 则由

$$C_{p+1} \xrightarrow{\partial_{p+1}} Z_p \to H_p \to 0 \tag{11}$$

之正合性得

$$C_{p+1} \otimes G \xrightarrow{\partial_{p+1} \otimes 1} Z_p \otimes G \to H_p \otimes G \to 0 \tag{12}$$

的正合性，由此

$$H_p(C.;G) \cong (H_p \otimes G) \oplus Z_p'. \tag{13}$$

又因为 $F_p \otimes G$ 在$\partial_p \otimes 1$ 之下同构于 $B_{p-1} \otimes G$，故

$$0 \to Z_p' \to B_{p-1} \otimes G \to Z_{p-1} \otimes G \to H_{p-1} \otimes G \to 0 \tag{14}$$

是正合的. 因此 Z_p' 被记作$H_{p-1} * G$ 或 Tor (H_{p-1}, G)，称为H_{p-1}与 G 的挠积 (torsion product). 于是有

$$H_p(C.;G) \cong (H_p \otimes G) \oplus \mathrm{Tor}(H_{p-1}, G) \tag{15}$$

或可写成分裂的（但分裂性不是自然的）短正合序列

$$0 \to H_p \otimes G \to H_p(C;G) \to \mathrm{Tor}(H_{p-1}, G) \to 0. \tag{16}$$

公式 (15) 或 (16) 说明，取任一交换群 G 作为系数群所得到的 p 维同调群 $H_p(C;\ G)$，完全被整系数同调群 H_p 与 H_{p-1}和 G 所确定. 从而整系数的各维同调群与群 G，完全决定以 G 为系数群的各维同调群. 因此人们称整系数群为万有系数群，而称公式 (15) 和 (16) 为同调群的万有系数定理.

还有一个一般性的考虑是，假设有交换群的一个短正合序列

$$0 \to G' \to G \to G'' \to 0, \tag{17}$$

而 $C.$ 是一个自由链复形，则有短正合序列

$$0 \to C.\otimes G' \to C.\otimes G \to C.\otimes G'' \to 0. \tag{18}$$

从而导致正合的长同调序列

$$\cdots \to H_p(C.;G') \to H_p(C.;G) \to$$

$$H_p(C.;G'')\xrightarrow{\beta}H_{p-1}(C.;G')\to\cdots \tag{19}$$

其中的连接同态 β 称为 Bockstein 同态，是由苏联数学家 M. F. Bockstein 在 [Bock] 中针对系数群短正合序列 $0\longrightarrow \mathbf{Z}\xrightarrow{\mu}\mathbf{Z}\longrightarrow \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}\longrightarrow 0$ 提出来的，其中 μ 为乘以 m.

§6.3 函子 Hom 和 Ext

有关上同调群的万有系数定理出现得要晚几年，那是 1942 年 [Ei-M 2]. 不过，这里将要用的函子，在代数学上都是已知的. Hom(A, G) 是从模 A 到模 G 的所有模同态组成的模. 设 F 是一个自由交换群，R 是 F 的一个子群，记 $H=F/R$ 是其商群，则有短正合序列

$$0\longrightarrow R\xrightarrow{i}F\xrightarrow{j}H\longrightarrow 0. \tag{20}$$

设 G 为任意交换群，则

$$0\longrightarrow \mathrm{Hom}(H, G)\xrightarrow{j^\#}\mathrm{Hom}(F, G)\xrightarrow{i^\#}\mathrm{Hom}(R,G) \tag{21}$$

的左边两项为正合，而 $i^\#$ 一般不是满射. 于是在右边加一项，记作$\mathrm{Ext}(H, G)=\mathrm{Hom}(R, G)/\mathrm{Im}\,i^\#$ 便得一正合序列

$$\begin{aligned}0\longrightarrow \mathrm{Hom}(H, G)\xrightarrow{j^\#}\mathrm{Hom}(F, G)\xrightarrow{i^\#}\\ \mathrm{Hom}(R,G)\longrightarrow \mathrm{Ext}(H, G)\longrightarrow 0.\end{aligned} \tag{22}$$

这个新的函子可用来表示上同调的万有系数定理. 设 $C.$ 为一个自由的 $\mathbf{Z}$ 模链复形，G 为任意交换群. 则 Hom$(C., G)$ 是一个上链复形，其同调记为 $H^\cdot(C.; G)$. 于是有

$$H^p(C.;G)\cong \mathrm{Hom}(H_p(C.),G)\oplus \mathrm{Ext}(H_{p-1}(C.),G) \tag{23}$$

或可写成分裂的(但分裂性不是自然的)短正合序列

$$0\longrightarrow \mathrm{Ext}(H_{p-1}(C.),G)\longrightarrow H^p(C.,G)$$

$$\longrightarrow \mathrm{Hom}(H_p(C.), G) \longrightarrow 0. \tag{24}$$

与 §6.2 的末尾相对应，设给了交换群的短正合序列

$$0 \longrightarrow G' \longrightarrow G \longrightarrow G'' \longrightarrow 0, \tag{25}$$

并设 $C.$ 是一个自由的链复形，则有短正合序列

$$0 \to \mathrm{Hom}(C., G') \to \mathrm{Hom}(C., G) \to \mathrm{Hom}(C., G'') \to 0, \tag{26}$$

从而得到上同调的长正合序列

$$\cdots \longrightarrow H^p(C.; G') \longrightarrow H^p(C.; G) \longrightarrow$$

$$H^p(C., G'') \xrightarrow{\beta} H^{p+1}(C.; G') \longrightarrow \cdots, \tag{27}$$

其中的连接同态 β 也称为上同调的 Bockstein 同态.

§6.4 Künneth 公式

早在 1923 年和 1924 年，H. Künneth [Ku 1, 2] 和 Lefschetz [Le 5] 独立地研究过乘积空间与两个因子空间的同调之间的关系. 现今称这些结果为 Künneth 公式.

如果我们先限于研究空间 X 和 Y 为欧氏紧的连通的胞腔复形，由于不变性已解决，同调不变量的计算便成了代数的初等问题. 设 X, Y 的剖分已给定，仍记为 X, Y，并设 $X \times Y$ 的剖分取成因子空间已给剖分的乘积剖分，亦记为 $X \times Y$. 于是 $X \times Y$ 中的 p 维整系数链组成的 $\mathbf{Z}$ 模 $S_p(X \times Y)$ 可表为以下直和分解

$$S_p(X \times Y) = \bigoplus_{0 \leqslant k \leqslant p} (S_k(X) \otimes S_{p-k}(Y)) \tag{28}$$

现在来用纯代数的说法讨论. 设 $C'.$ 和 $C''.$ 是任意两个链复形. 作链复形 $C. = C'. \otimes C''.$ 为

$$C_p = \bigoplus_{0 \leqslant k \leqslant p} (C'_k \otimes C''_{p-k}) \tag{29}$$

及边缘运算为

$$\partial_p(z'_k \otimes z''_{p-k}) = \partial'_k z'_k \otimes z''_{p-k} + (-1)^k z'_k \otimes \partial''_{p-k} z''_{p-k}. \tag{30}$$

易证$\partial_{p-1}\circ\partial_p = 0$；若 z'_k 和z''_{p-k}均为闭链，则 $z'_k \otimes z''_{p-k}$也是闭链；并且若两个闭链 z'_k 和z''_{p-k}中有一是边缘，则 $z'_k \otimes z''_{p-k}$也是边缘．由此得到一个同调群的分次 **Z** 模同态

$$H_.(C'_.)\otimes H_.(C''_.) \longrightarrow H_.(C'_.\otimes C''_.) \tag{31}$$

若 $C'_.$ 和 $C''_.$ 均为自由的，则有下列分裂的正合序列

$$0 \longrightarrow \bigotimes_{0\leqslant k\leqslant p}(H_k(C'_.)\otimes H_{p-k}(C''_.)) \longrightarrow H_p(C'_.\otimes C''_.)$$

$$\longrightarrow \bigoplus_{0\leqslant l\leqslant p-1} \mathrm{Tor}(H_l(C'_.), H_{p-l-1}(C''_.)) \longrightarrow 0. \tag{32}$$

读者可参考［Sp 2；228～229］．

§6.5　范畴与函子

当 Eilenberg 和 S. Mac Lane 在同调论中运用 Ext（A，B）以后，他俩立刻走向非常一般的考虑，最终达到这样的地步，为数学的许多分支带来了新的观点，尤其迅速为代数，代数拓扑和代数几何等所利用．

1945 年，他们发表了一篇长文［Ei-M 4］，其中引进了“范畴”一词，来表示具有共同的结构的一类数学对象，这些对象之间有一些“态射”．不同的范畴之间有“函子”．他们举了许多例子，特别，同调论是从链复形范畴到交换群范畴的一个协变函子．

关于范畴与函子的基本概念，读者可以参考［Sp 2］，［Ei-S 2］或［M］．

§6.6 链伦移与链等价

同伦概念反映在同调代数中是链复形之间的链伦移. 这是 Eilenberg 于 1944 年在［Ei 3］中首先对自由链复形引进，尔后在［Ei-S 2］中将“自由”这个限制取消了. 设 $C_{\cdot}=(C_j)$ 和 $C'_{\cdot}=(C'_j)$ 是两个链复形，$u_{\cdot}=(u_j)$ 和 $v_{\cdot}=(v_j)$ 是从 $C_{\cdot}$ 到 $C'_{\cdot}$ 的两个链映射. 一个连接 $u_{\cdot}$ 和 $v_{\cdot}$ 的链伦移是一个同态序列 $h_{\cdot}=(h_j), h_j: C_j \to C'_{j+1}$，满足对于所有 $j\in \mathbf{Z}$ 及所有 $x_j\in C_j$，有

$$v_j(x_j)-u_j(x_j)=\partial'_{j+1}(h_j(x_j))+h_{j-1}(\partial_j x_j), \tag{33}$$

即作为映射来说，有等式

$$v_j-u_j=\partial'_{j+1}\circ h_j+h_{j-1}\circ\partial_j. \tag{34}$$

当连接 $u_{\cdot}$ 和 $v_{\cdot}$ 的链伦移存在时，则说 $u_{\cdot}$ 和 $v_{\cdot}$ 是链同伦的. 此时，容易验证 $u_{\cdot}$ 与 $v_{\cdot}$ 导出同调群 $H_{\cdot}(C_{\cdot})$ 与 $H(C'_{\cdot})$ 之间相同的同态 $H_{\cdot}(u_{\cdot})=H_{\cdot}(v_{\cdot})$.

链复形 $C_{\cdot}$ 与 $C'_{\cdot}$ 之间的一个链等价，是指存在两个链映射 $f_{\cdot}: C_{\cdot}\to C'_{\cdot}$ 和 $g_{\cdot}: C'_{\cdot}\to C_{\cdot}$ 使得 $g_{\cdot}\circ f_{\cdot}: C_{\cdot}\to C_{\cdot}$ 和 $f_{\cdot}\circ g_{\cdot}: C'_{\cdot}\to C'_{\cdot}$ 分别链同伦于 $C_{\cdot}$ 和 $C'_{\cdot}$ 上的恒同映射. 因此当链等价存在时，同调群 $H_{\cdot}(C_{\cdot})$ 与 $H_{\cdot}(C'_{\cdot})$ 是同构的.

设 $C_{\cdot}=(C_j)_{j\geqslant 0}$ 是一个 R 模链复形，按定义 $\partial_0=0$，因此 0 维链都是闭链，并且序列 $C_1\xrightarrow{\partial_1}C_0\to H_0(C_{\cdot})\to 0$ 是正合的. $C_{\cdot}$ 的一个增广是一个满同态 ε: $C_0\to R$ 满足 $\varepsilon\circ\partial_1=0$. 带有增广 ε 的链复形 $C_{\cdot}$ 称为零调的 (acyclic)，如果 $\mathrm{Im}\,\partial_1=\mathrm{Ker}\,\varepsilon$，其充分必要条件是，对于任意 $j>0$，有 $H_j(C_{\cdot})=0$，并且 $H_0(C_{\cdot})\cong R$.

自由的增广的链复形首先由 Hopf 在 1945 年引进［Hop 13］.

他证明了：若（$C.$，ε）和（$C'.$，ε'）分别是 R 和 R' 上的增广自由链复形，并且（$C'.$，ε'）是零调的，则对任意给定的同态 φ：$R \to R'$，存在链映射 $f.$：$C. \to C'.$，满足使图表

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots \longrightarrow & C_j & \xrightarrow{\partial_j} & C_{j-1} & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & C_1 & \xrightarrow{\partial_1} & C_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & R & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow f_j & & \downarrow f_{j-1} & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_0 & & \downarrow \varphi & \\
\cdots \longrightarrow & C'_j & \xrightarrow{\partial'_j} & C'_{j-1} & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & C'_1 & \xrightarrow{\partial'_1} & C'_0 & \xrightarrow{\varepsilon'} & R' & \longrightarrow 0
\end{array} \tag{35}$$

是交换的．并且，任何两个这样的链映射 f，g 都是链同伦的．于是，若（$C.$，ε）和（$C'.$，ε'）都是零调的，并且 φ：$R \longrightarrow R'$ 诱导的同态 φ：$H_0(C.) \longrightarrow H_0(C'.)$ 是双射，则 $C.$ 和 $C'.$ 是链等价的．

这个定理是采用归纳的构作办法来证明的．Lefschetz 在 1942 年的书［Le 12］中，已经采用了类似的归纳方法来证明用不同的方法定义的同调模是同构的．他本质上是用到所讨论的链复形 $C. = (C_j)$ 的每个 C_j 都有一个基由欧氏单形或由欧氏单形的连续映射的像组成．而欧氏单形或其连续映射的像都是零调的，它们被称为零调承载子．

§6.7 零调模型

零调承载子方法的发展，翻译为纯代数的语言，便得零调模型方法，有重要应用．

问题是由乘积空间引起的．设 X，Y 是两个拓扑空间，对 X，Y 及它们的乘积 $X \times Y$ 均取奇异链复形 $S.(X)$，$S.(Y)$ 和 $S.(X \times Y)$．再取 $S.(X)$ 与 $S.(Y)$ 的张量积 $S.(X) \otimes S.(Y)$，它也是一个链复形．Eilenberg 和 Zilber 在［Ei-Z］中证明了下面

的 Eilenberg-Zilber 定理：在$S.(X\times Y)$和 $S.(X)\otimes S.(Y)$之间存在链等价，因此，它们的同调模是同构的．读者可以参考［Gr-H］而得其证明．

将其证明抽象，可得所谓零调模型方法（method of acyclic models)，其最一般的处理见于［Ei-M 10］．我们介绍其常用的特例如下．设 $\mathscr{C}$ 为一个范畴，指定 $\mathscr{C}$ 中一些对象的集合 $\mathfrak{M}$，称为模型，此时（$\mathscr{C}$，$\mathfrak{M}$）称为一个带有模型的范畴．给了从 $\mathscr{C}$ 到阿贝尔群范畴的一个协变函子 G，G 的一个基是一个集合$\{g_j\in G(M_j)\}_{j\in J}$，其中 $M_j\in\mathfrak{M}$，使得对于 $\mathscr{C}$ 中任意对象 X，集合$\{G(f)(g_j);j\in J,f\in\hom(M_j,X)\}$是 $G(X)$的一个基．如果 G 有了一个上述的基，则 G 称为带有模型的范畴（$\mathscr{C}$，$\mathfrak{M}$）的一个自由函子．若 G 是从 $\mathscr{C}$ 到增广链复形范畴的一个协变函子，且对每个 $q\geqslant 0$，G_q 是自由的，则称 G 是自由的；若对任意 $M\in\mathfrak{M}$，G（M）是零调的，则称 G 是零调的．零调模型定理说：若 G 和G'是（$\mathscr{C}$，$\mathfrak{M}$）到增广链复形范畴的两个函子，使得 G 是自由的而 G'是零调的．则存在保增广的自然链映射 τ：$G\to G'$；两个保增广的自然链映射 τ，τ'：$G\to G'$是自然地链同伦的．若 G 和G'都是自由的零调的，则 G 与G'是自然地链等价的，事实上，任一从 G 到G'的保增广的链映射都是一个自然的链等价．

关于此读者可参考［Sp 2］.

§6.8 叉积与斜积

应用于拓扑空间可得叉积如下．设 X 和 Y 是两个拓扑空间，从 Eilenberg-Zilber 定理知存在一个自然的分次 $\mathbf{Z}$ 模同构

$$H.(X\times Y;\mathbf{Z})\cong H.(S.(X)\otimes S.(Y)),\tag{36}$$

又从链复形的 Künneth 定理(32)知，有正合序列

$$0\to\bigoplus_{0\leq k\leq p}(H_k(X;\mathbf{Z})\otimes H_{p-k}(Y;\mathbf{Z}))\to H_p(X\times Y;\mathbf{Z})$$
$$\to\bigoplus_{0\leq l\leq p-1}\mathrm{Tor}(H_l(X;\mathbf{Z}),H_{p-l-1}(Y;\mathbf{Z}))\to 0,\qquad(37)$$
由此，对 $z\in H_k(X;\ \mathbf{Z})$ 和 $Z'\in H_l(Y;\ \mathbf{Z})$，定义同调叉积 (homology cross product) $z\times z'\in H_{k+l}(X\times Y;\ \mathbf{Z})$ 为 $z\otimes z'$在 (37) 中第一个同态之下的像.

另一方面，对任意两个交换群 G 和G'，存在上链复形的上链变换

$$\mathrm{Hom}(S.(X),G)\otimes\mathrm{Hom}(S.(Y),G)\to$$
$$\mathrm{Hom}(S.(X)\otimes S.(Y),G\otimes G'),\qquad(38)$$

并且 Eilenberg-Zilber 链等价 $S.(X\times Y)\to S.(X)\otimes S.(Y)$给出上链等价

$$\mathrm{Hom}(S.(X)\otimes S.(Y),G\otimes G')\to$$
$$\mathrm{Hom}(S.(X\times Y),G\otimes G').\qquad(39)$$

从而得奇异上同调群同态

$$H^p(X;G)\otimes H^q(Y;G')\to H^{p+q}(X\times Y;G\otimes G').\qquad(40)$$

设 Λ 为一交换环，取 G，G'均为 Λ 之加法群，并运用典则同态 $\Lambda\otimes_{\mathbf{Z}}\Lambda\to\Lambda$，则由 (40) 得

$$H^p(X;\Lambda)\otimes H^q(Y;\Lambda)\to H^{p+q}(X\times Y;\Lambda).\qquad(41)$$

据此，由 $u\in H^p(X;\ \Lambda)$ 和 $v\in H^q$ $(Y;\ \Lambda)$ 定义上同调叉积 (cohomology cross product) $u\times v\in H^{p+q}(X\times Y;\ \Lambda)$为 $u\otimes v$ 在同态 (41) 之下的像.

特别，当 $X=Y$ 时，可由此得上积的新定义，这是 Lefschetz 于 1942 年在 [Le 12] 中得到的. 设 Δ: $X\to X\times X$ 为对角映射，诱导同态$\Delta^*:H^\cdot(X\times X;\Lambda)\to H^\cdot(X;\Lambda)$,于是有

$$u\cup v=\Delta^*(u\times v).\qquad(42)$$

Steenrod 于 1953 年 [Ste 11] 中引进了斜积如下. 设 $C.$ 和 $C'.$ 是两个自由的链复形，G 和 H 是两个交换群. 对于 $u\in(\mathrm{Hom}(C.\otimes C'.,\ G))_n$ 和$c\in C_q\otimes H(q\leqslant n)$，设 (σ_i) 为 C_q 之

基，则 $c=\Sigma_i\sigma_i\otimes h_i$，$h_i\in H$. 定义右斜积（right slant product）$u/c\in(\mathrm{Hom}(C'_\cdot,\ G\otimes H))_{n-q}$为

$$(u/c)(\tau')=\Sigma_i u(\sigma_i\otimes\tau')\otimes h_i \tag{43}$$

上边缘与边缘满足关系式

$$\delta_{n-q}(u/c)=(\delta_n u/c)-(-1)^{n-q}(u/\partial_q c). \tag{44}$$

由此可见上闭链 u 与闭链 c 之右斜积 u/c 为一个上闭链，且若 u 是上边缘或者 c 是边缘，则 u/c 为一个上边缘．于是得右斜积同态

$$H^n(C_\cdot\otimes C'_\cdot;G)\times H_q(C;H)\to H^{n-q}(C';G\otimes H), \tag{45}$$
$$(w,z)\mapsto w/z.$$

将上面的第一因子换成第二因子，类似地，可定义左斜积（left slant product）同态

$$H^n(C_\cdot\otimes C'_\cdot;G)\times H_q(C';H)\to H^{n-q}(C;G\otimes H), \tag{46}$$
$$(w,z)\mapsto z\backslash w.$$

第七章　同调的公理化

到 1940 年代初，已经对不同的空间类定义了许多种同调群及上同调群．在相互比较的过程中发现，它们对于某些类空间是同构的．特别对于有限欧氏单纯复形，所有的同调群都互相同构．这是因为所有这些同调理论都具有共同的某些基本性质．Eilenberg 和 Steenrod 将这些基本性质提取出来而于 1945 年[Ei-S 1]作为加法同调和上同调的公理化定义．读者亦可参阅[Ei-S 2]，[Mu 8] 或 [Vi]．

§7.1　同调理论的公理系统

对同一个空间，采取不同的方式定义出不同的链复形，它们可能区别极大，但何以所得同调群彼此同构．Eilenberg 和 Steenrod 发现有一些最基本的性质决定了同调群，因此他们将这几条性质定为同调理论的公理系统．具体说来，同调的公理如下．

设 X 是一个拓扑空间，A 是 X 的一个子集具有 X 中的相对拓扑，则 (X, A) 称为一个空间对．设 (X, A) 和 (Y, B) 是两个空间对，f: $X \to Y$ 是一个连续映射，使得 $f(A) \subset B$，称 f 是从空间对 (X, A) 到空间对 (Y, B) 的连续映射，记作 f: $(X, A) \to (Y, B)$．

由空间对和它们之间的连续映射组成的范畴 $\mathscr{A}$，称为一个

(同调理论的)可允许范畴，这种空间对和映射称为可允许的，如果它们满足下列五个条件．

(1) 若 $(X, A) \in \mathscr{A}$，则下列格图

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & (X,\varnothing) & & \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
(\varnothing,\varnothing) \to (A,\varnothing) & & & & (X,A) \to (X,X) \\
 & \searrow & & \nearrow & \\
 & & (A,A) & &
\end{array}
\tag{1}
$$

中所列空间及包含映射均属于$\mathscr{A}$．今后形如 $(X, \varnothing)$ 的空间对记作 X．

(2) 若 f: $(X, A) \to (Y, B)$ 属于$\mathscr{A}$中，则 (X, A) 和 (Y, B) 都属于$\mathscr{A}$，且 f 定义了 (X, A) 的格图中与 (Y, B) 的格图中对应项之间的映射均属于$\mathscr{A}$．

(3) 若 f_1 和 f_2 属于$\mathscr{A}$，且复合 f_1f_2 可定义，则 f_1f_2 也属于$\mathscr{A}$．

(4) 若$I=[0,1]$是实数的闭单位区间，$(X,A)\in\mathscr{A}$，则笛卡尔乘积$(X,A)\times I=(X\times I, A\times I)$属于$\mathscr{A}$，且映射$g_0, g_1:(X, A)\to(X,A)\times I$ 定义为 $g_0(x)=(x,0)$，$g_1(x)=(x,1)$均属于$\mathscr{A}$．

(5) 在$\mathscr{A}$中存在一个由单点组成的空间．若 X，P 均属于$\mathscr{A}$，若 f: $P\to X$ 且若P 是一个单点空间，则 f 属于$\mathscr{A}$．

我们还将用到下面的定义．在可允许的范畴$\mathscr{A}$中，两个映射 f_0，f_1: $(X,A)\to(Y,B)$称为在$\mathscr{A}$中是同伦的并记作 $f_0\simeq f_1$，如果存在$\mathscr{A}$中一个映射$h:(X,A)\times I \longrightarrow (Y,B)$，使得 $f_0=hg_0$ 和 $f_1=hg_1$，或者$f_0(x)=h(x, 0)$和 $f_1(x)=h(x, 1)$．映射 h 称为一个伦移．

拓扑空间的一个可允许的范畴$\mathscr{A}$的一个同调理论 H．是由以下三件事物组成：对$\mathscr{A}$中每一个空间对 (X, A) 和每一个非负整数 q 有一个阿贝尔群$H_q(X, A)$，称为 X 模A 的第q 维（个）相对同调群．对$\mathscr{A}$中任意映射 f: $(X, A) \to (Y, B)$ 和每一

个非负整数 q 有一个同态，f_{*q}: $H_q(X, A) \to H_q(Y, B)$，称为 f 诱导的同态. 对$\mathscr{A}$中任意空间对 (X, A) 和每一个非负整数 q，有一个同态$\partial(q, X, A)$: $H_q(X, A) \to H_{q-1}(A)$，称为边缘同态. 这三件事物具有以下性质：

公理 1 若 f= 恒等映射，则 f_* = 恒等同构.

公理 2 $(g\circ f)_* = g_*\circ f_*$.

公理 3 $\partial\circ f_* = (f|A)_*\circ\partial$.

公理 4（正合公理）若 (X, A) 为可允许空间对且 i: $A\to X$，j: $X\to(X, A)$ 都是包含映射，则下列群与同态之序列

$$\cdots\xrightarrow{\partial}H_q(A)\xrightarrow{i_*}H_q(x)\xrightarrow{j_*}H_q(X,A)\xrightarrow{\partial}$$
$$H_{q-1}(A)\xrightarrow{i_*}\cdots \tag{2}$$

是正合的. 此序列称为 (X, A) 的同调序列.

公理 5（同伦公理） 若$\mathscr{A}$中的可允许映射 f_0，f_1: $(X, A)\to(Y, B)$ 是同伦的，则对于任意的非负整数 q，诱导同态 f_{0*}和 f_{1*}是相同的.

公理 6（切除公理） 若(X,A)是可允许空间对，若 U 是 X 的开集，其闭包 $\overline{U}$ 包含于 A 的内部，并且包含映射 e:$(X\setminus U,A\setminus U)\to(X,A)$是可允许的，则对每个非负整数 q，其诱导同态是同构e_*:$H_q(X\setminus U,A\setminus U)\cong H_q(X,A)$. 这种包含映射 e 称为一个切除.

公理 7（维数公理） 设 P 是$\mathscr{A}$中一个由单点组成的可允许空间，则对所有正整数 q，有$H_q(P)=0$. $H_0(P)$称为该同调理论的系数群.

§7.2 上同调理论的公理系统

拓扑空间的一个可允许范畴$\mathscr{A}$的一个上同调理论 H^*是由以

下三件事物组成：对$\mathscr{A}$的每一个空间对（X，A）和每一个非负整数 q 有一个阿贝尔群 H^q（X，A），称为 X 模 A 的第 q 维（个）相对上同调群．对$\mathscr{A}$中任意映射$f:(X,A)\to(Y,B)$和每个非负整数 q，有一个同态 f_q^*：H^q（Y，B）$\to H^q$（X，A），称为 f 诱导的同态．对$\mathscr{A}$中任意空间对（X，A）和非负整数 q，有一个同态 δ：H^{q-1}（A）$\to H^q$（X，A），称为上边缘同态．这三件事物具有以下性质：

公理 1c 若 $f=$恒等映射，则 $f^*=$恒等同构．

公理 2c $(g\circ f)^*=f^*\circ g^*$．

公理 3c $\delta\circ(f|A)^*=f^*\circ\delta$．

公理 4c 若（X，A）为可允许空间对且 i：$A\to X$，j：$X\to$（X，A）都是包含映射，则下列群与同态的序列

$$\cdots\xrightarrow{i^*}H^{q-1}(A)\xrightarrow{\delta}H^q(X,A)$$
$$\xrightarrow{j^*}H^q(X)\xrightarrow{i^*}H^q(A)\xrightarrow{\delta}\cdots \tag{3}$$

是正合的．此序列称为（X，A）的上同调序列．

公理 5c 若$\mathscr{A}$中的可允许映射 f_0，f_1：（X，A）$\to$（Y，B）是同伦的，则对于任意非负整数 q，诱导同态 f_0^* 和 f_1^* 是相同的．

公理 6c 若（X，A）是$\mathscr{A}$中可允许空间对，若 U 是 X 的开集且其闭包 $\overline{U}$ 包含于 A 的内部，并且包含映射 e：（$X\setminus U$，$A\setminus U$）$\to$（X，A）是可允许的，则对每个非负整数 q，其诱导同态是同构$e^*:H^q(X,A)\cong H^q(X\setminus U,A\setminus U)$．

公理 7c 若 P 是$\mathscr{A}$中一个由单点组成的可允许空间，则对于所有的正整数 q，有$H^q(P)=0$．$H^0(p)$称为该上同调理论的系数群．

至此，我们有了加法同调和上同调理论的公理化．而同调与上同调之间有对偶关系．按 Pontrjagin 对偶定理［Pt 1］，若满足公理 1c～7c 的上同调理论中的上同调群总是离散的交换群，则

它们的 Pontrjagin 对偶（即特征标群）以及对偶同态将满足公理 1～7．因此就加法同调理论和上同调理论而言，可以只处理同调理论．

§7.3 广义同调和上同调

大约在 1959 年左右，许多在不同方向工作的数学家都同时考虑到从某个拓扑空间范畴 $\mathscr{C}$ 到阿贝尔群范畴 Ab 的协变函子或反变函子，这些函子满足 Eilenberg-Steenrod 的同调或上同调公理中除第 7 条维数公理外的所有公理，这种函子的理论称为广义同调或广义上同调．

这种理论之一是 Atiyah 和 Hirzebruch ［At-H 2］创建的 K 理论．关于它，我们还将在第 21 章中详细讨论．这里简介如下，在他们的理论中，$\mathscr{C}$ 表示有基点的有限 CW 复形范畴；协变函子 K 为，首先对 $\mathscr{C}$ 中任意空间对 (X,Y) 及任意非负整数 n，定义

$$K^{-n}(X,\ Y)=K(\Sigma^n(X/Y)),\tag{4}$$

$$K^{-n}(X)=K^{-n}(X,\varnothing),\tag{5}$$

满足 $K^0(X)=K(X)$，$K^0(X,Y)=K(X,Y)$，其中 $\Sigma^n X=S^n\wedge X$ 表累次约化双角锥，K（X）是 X 上的凝聚束的 Grothendieck 群（参见［Gro］）．进而，还可定义 $K^n(X,Y)$，并有两端无限的正合序列

$$\begin{aligned}&\cdots\longrightarrow K^{-n-1}(Y)\xrightarrow{\partial}K^{-n}(X,Y)\longrightarrow K^{-n}(X)\\&\longrightarrow K^{-n}(Y)\xrightarrow{\partial}\cdots\longrightarrow K^0(X)\longrightarrow K^0(Y)\xrightarrow{\partial}\cdots\\&\longrightarrow K^n(K,Y)\longrightarrow K^n(X)\longrightarrow K^n(Y)\xrightarrow{\partial}K^{n+1}(X,Y)\longrightarrow\cdots\end{aligned}\tag{6}$$

于是，他们认为对范畴 $\mathscr{C}$ 定义了一个“广义的”上同调理

论. 因为它们满足除公理 7c 以外的所有公理 1c ~ 6c, 而 $K^n(P) \cong \mathbf{Z}$, 对 n 偶; 且 $K^n(P)=0$, 对 n 奇, 其中 P 表示一个由单点组成的空间.

由 Eilenberg-MacLane 空间 (参见第 16 章) 与上同调群之关系

$$[X;\ K(\pi,n)]\cong H^n(X;\pi), \tag{7}$$

推广得

$$[X/Y;K(\pi,n)]\cong H^n(X,Y;\pi). \tag{8}$$

还存在一个弱同伦等价 $K(\pi,n)\simeq \Omega K(\pi,\ n+1)$, 因此有弱同伦等价 ρ_n: $\Sigma K(\pi,n)\to K(\pi,n+1)$. 因为双角锥定义了一个同构 $H^q(X;\ \pi)\cong H^{q+1}(\Sigma X;\ \pi)$, 累次应用双角锥得到同构 $[X;K(\pi,\ q)]\cong[\Sigma^{n-q}X;K(\pi,\ n)]$, 因此有

$$H^q(X;\pi)\cong \varinjlim[\Sigma^n X;K(\pi,\ g+n)]. \tag{9}$$

此事可推广如下. 对任意有基点的 CW 复形之谱 (spectrum)

$$E:\ E_1\to E_2\to\cdots\to E_n\to\cdots$$

及对一个有限 CW 复形 X, 定义一个广义上同调群

$$H_E^q(X)=\varinjlim[\Sigma^n X;E_{q+n}]. \tag{10}$$

还可推广为, 对 X 的一个 CW 子复形 Y, 定义相对广义上同调群为

$$H_E^q(X,\ Y)=H_E^q(X/Y) \tag{11}$$

可以检验这样定义的广义上同调群满足公理 1c ~ 6c, 而维数公理 7c 则调换为对一个单点空间 P, 有

$$H_E^q(P)\cong\varinjlim\pi_n(E_{n+q}). \tag{12}$$

另外协边理论也是一种广义同调理论, 我们将在第十七章中专门介绍.

第八章　商空间及 CW 复形

在代数拓扑学的发展过程中，要用到许多有关商空间的概念．我们把它们收集整理在这里．它们都与以后要讲到的理论有密切关系．这方面作出贡献的人很多，其中英国拓扑学家 J. H. C. Whitehead 贡献尤卓．

§8.1　商空间

19 世纪的数学家们就已经自如地运用着等置（identifying）和粘合（gluing）等说法，当时缺乏精确的定义，因为一般拓扑学的基本概念尚未建立．

若以德国数学家 F. Hausdorff 的书［Ha 1］的出版作为拓扑学基本概念形成的标志，那是 1914 年．在那本书中并没有商空间概念．

第一次谈到商拓扑的可能是 R.L.Moore 1924 年的文章［Moo］．而到 1934 年，H.Seifert 和 W.Threlfall 的书［Se-T 1］中则用专门的一节来讲“Identifizieren”（早年的江先生译本译成“叠合”），我们现在译成“等置”．

商空间的一般的定义最初见于 1940 年出版的 N. Bourbaki 的［Bou］．其定义如下．设 E 是一个拓扑空间，R 是 E 中的一

个等价关系. E/R 表在 R 之下的等价类所成集合. 称使得典则映射 φ: $E\to E/R$ 连续的 E/R 上的最精细的拓扑为 E/R 上的商拓扑. 集合 E/R 赋以商拓扑就称为 E 在 R 之下的商空间 (quotient space). 接着, 该书叙述了商空间的一系列基本性质. 如定义在商空间 E/R 上的映射 f 是连续的, 当且仅当 $f\circ\varphi$ 是连续的. 还讲到开关系和闭关系等概念, 子空间的商空间等等. 特别还讲到两个商空间 E/R 和 F/S 的乘积空间 $(E/R)\times(F/S)$ 虽然与乘积空间 $E\times F$ 关于乘积关系 $R\times S$ 的商空间 $(E\times F)/(R\times S)$ 典则地一一对应, 则当 R 和 S 都是开关系时得到同胚, 但一般说来不总是同胚. 在该书的第一版中, 这个事实被错误地陈述, 而在 1951 年以后的版中得到纠正, 并在习题中安排了一个具体例子, 说明这个典则对应不是同胚.

§8.2 塌 缩

设 X 是一个拓扑空间, A 是 X 的一个子集. 设等价关系为 A 中点相互等价, $X\setminus A$ 中点只与自己等价. 对应的商空间记为 X/A, 称为将 X 中 A 塌缩 (collapsing 或 shrinking) 成一点而得. J. H. C. Whitehead 早在 20 世纪 30 年代 [WhH 14] 就用到它. 设 A 是 X 中闭集, 则塌缩映射 ρ: $X\to X/A$ 限制在 $X\setminus A$ 上是从 $X\setminus A$ 到 $X/A\setminus\{\rho(A)\}$ 上的一个同胚. 对于任何满足 $H^*(X, A)\cong H_C^*(X\setminus A)$ 和 $H^*(X/A, \{\rho(A)\})\cong H_C^*(X/A\setminus\{\rho(A)\})$ 的上同调理论, 从上同调正合序列即可推出 $H^p(X/A)\cong H^p(X, A)$, 对 $p\geqslant 1$, 及 $\widetilde{H}^0(X/A)\cong\widetilde{H}^0(X, A)$. 特别当闭集 A 是 A 的一个开邻域基本序列的强形变收缩核时就是这样. 如果再加上 A 是可缩成一点的, 则有 $H^p(X/A)\cong H^p(X)$, 对 $p\geqslant 1$, 及 $\widetilde{H}^0(X/A)\cong\widetilde{H}^0(X)$. 如果 $A\subset B$ 是 X 的

两个闭集，X/A 中的像 $\rho(B)$ 是同胚于 B/A，并且 $(X/A)/(B/A)$ 自然同胚于 X/B．

§8.3 常用的一些构作

A．锥（cone）

设 X 是拓扑空间，考虑空间 $Y=X\times I$ 及其闭子空间 $A_0=X\times\{0\}$．将 A_0 塌缩得商空间 Y/A_0，称为 X 上的未约化锥（unreduced cone）并记为 $\widetilde{C}X$．$\widetilde{C}X$ 是可缩到一点的，并且 X 可等同于 Y 中闭子空间 $X\times\{1\}$ 在 $\widetilde{C}X$ 中的像．由相对同调的正合序列得

$$\begin{aligned}&H_q(\widetilde{C}X,\widetilde{C}X\setminus X)\cong H_{q-1}(X),\text{对 } q>1,\\&H_1(\widetilde{C}X,\widetilde{C}X\setminus X)\cong\widetilde{H}_0(X).\end{aligned}\tag{1}$$

如果取定 $x_0\in X$，则将 $(X\times\{0\})\cup(\{x_0\}\times I)$ 塌缩后得商空间 $Y/((X\times\{0\})\cup(\{x_0\}\times I))$ 称为（X，x_0）上的约化锥（reduced cone）或简称锥（cone），并记作 CX．CX 可缩到点 x_0．

B．双角锥（suspension）

采用（A）中同样记号，再设 $A_1=X\times\{1\}$，它在 $\widetilde{C}X=Y/A_0$ 中的像已等同于 X．然后将 X 塌缩得商空间 $\widetilde{C}X/X$，记作 $\widetilde{\Sigma}X$，称为 X 上的未约化双角锥（unreduced suspension，suspension 也译成同纬构造）．类似地，将 CX 中子空间 X 塌缩得商空间 CX/X，记作 ΣX，称为 X 上的约化双角锥（reduced suspension）或双角锥（suspension）．关于它们的性质，参见 §9.8．

C．楔积（wedge product）

设 X，Y 是两个拓扑空间，$x_0\in X$，$y_0\in Y$．定基点空间（X，x_0）和（Y，y_0）的楔积定义为，在不交并 $X\sqcup Y$ 中将 x_0 与 y_0 等置而得的空间，记作 $X\vee Y$．它同胚于乘积空间 $X\times Y$

中的子空间$(X\times\{y_0\})\cup(\{x_0\}\times Y)$，故时常被人写作$X\vee Y=(X\times\{y_0\})\cup(\{x_0\}\times Y)$.

若将 $X\times Y$ 中的子空间$X\vee Y=(X\times\{y_0\})\cup(\{x_0\}\times Y)$塌缩成一点而得到的商空间记作 $X\wedge Y=X\times Y/X\vee Y$，称为定基点空间（$X$，$x_0$）和（$Y$，$y_0$）的塌积（smash product）. 易见

$$S^1\wedge X\cong\Sigma X. \tag{2}$$

D. **联积（join）**

构作两个空间的联积的做法 H. Poincaré 就采用过. 现对两个任意的拓扑空间 X 和 Y 定义这个概念. 在 $X\times Y\times I$ 中引进等价关系R 为：对于$0<t<1$，$x\in X$，$y\in Y$，(x, y, t) 只与自己等价；对任意 $x\in X$ 和y，$y'\in Y$，$(x, y, 0)$ 与 $(x, y', 0)$ 等价；对任意 x，$x'\in X$ 和$y\in Y$，$(x, y, 1)$ 与 $(x', y, 1)$ 等价. $X\times Y\times I$ 关于关系R 的商空间记作$X*Y$，称为 X 和 Y 的联积. 在商映射 p：$X\times Y\times I\longrightarrow X*Y$ 之下，$X\times Y\times\{0\}$的像和 $X\times Y\times\{1\}$的像分别同胚于 X 和 Y. 特别，$\tilde{C}X$ 是X 与一个单点集之联积，而未约化双角锥 $\tilde{\Sigma}X$ 是X 与一对点的联积.

E. **附贴空间（adjunction）**

J. H. C. Whitehead 在 1938 年［WhH 15］还引进了附贴空间的构作以研究同伦问题. 设 X 和 Y 是两个拓扑空间，A 是 X 的一个子集，f：$A\to Y$ 是连续映射. 在不交并 $X\sqcup Y$ 中引进等价关系R 如下. 对 $x\in X\setminus A$ 它只与自己等价；对 $y\in Y$，y 与$f^{-1}(y)$中所有点互相等价. 商空间$(X\sqcup Y)/R$，记作 $X\cup_f Y$，称为空间 X 沿A 用f 映到 Y 上的附贴空间. 商映射 p：$X\sqcup Y\to X\cup_f Y$ 在 Y 上的限制将 Y 同胚地映成$X\cup_f Y$ 的子空间 $p(Y)$. 因此，在这个意义下可认为 Y 是$X\cup_f Y$ 的子空间. 如果 A 是X 的闭子集，则 p 在$X\setminus A$ 上的限制将$X\setminus A$ 同胚地映成$X\cup_f Y$ 的开子集$(X\cup_f Y)\setminus p(Y)$. 如果 X，Y 都是正规空间，A 是X 的闭子空间，则 $X\cup_f Y$ 也是正规的.

F. **映射柱（mapping cylinder）**

设 X 和 Y 是拓扑空间，f: $X\to Y$ 是连续映射. J. H. C. Whitehead 在 1939 年还引进了映射柱的概念如下. 在乘积空间 $X\times I$ 中的子集$X\times\{1\}$上定义映射$(x,1)\mapsto f(x)$，则 $X\times I$ 沿 $X\times\{1\}$用上述映射映到 Y 上的附贴空间，记为 Z_f，称为 f 的映射柱. 由（E）知，Y 可看成是 Z_f 的子空间，同时 X 利用 $x\mapsto(x, 0)$，再用商映射，也可看成 Z_f 的子空间. 而且 Y 还是 Z_f 的强形变收缩核.

若 $x_0\in X$ 是给定的一点，在 Z_f 中将$\{x_0\}\times I$ 在 Z_f 中的像塌缩成一点所得商空间，记作 $\tilde{Z}_f$，称为 f 的约化映射柱. Y 仍是 $\tilde{Z}_f$ 的强形变收缩核.

G. **映射锥（mapppig cone）**

设 X 和 Y 是拓扑空间，f: $X\to Y$ 是连续映射. 按（A）作约化锥 CX. 再按（E）构作 CX 沿 X 用 f 映到 Y 上的附贴空间记作 $C_f=CX\cup_f Y$，称为 f 的映射锥. 也可以取（F）中约化映射柱 $\tilde{Z}_f$，再将子空间 X 塌缩成一点而得商空间，即 $C_f\cong\tilde{Z}_f/X$. 这是由 M. Barratt 在 1955 年［B］和 D. Puppe 在 1958 年［Pu］定义的.

§8.4 CW 复形

自从 1933 年，法国数学家 C. Ehresmann 为了计算格拉斯曼流形的同调而采用胞腔剖分以后，最重要的一步推广是 J. H. C. Whitehead 于 1941 年［WhH 14；273］提出的概念，当时称为“薄膜复形（membrane complex)”，到 1949 年他改称为 CW 复形，意思是“闭包有限并具弱拓扑的复形（closure finite complex with weak topology)”的缩称［WhH 9］. 这现已被认为对同

伦论来说是合适的而被广泛使用的基本概念.

一个 CW 复形是一个 Hausdorff 空间 K，K 分解成满足下列条件的不相交的子集 $\{e_a\}$ 的并，满足:

(i) 每个 e_a 是同胚于一个开的胞腔，维数为 $n(a)\geqslant 0$. 并且，对每个胞腔 e_a，存在一个连续映射

$$f: D^{n(a)}\to K,$$

其中$D^{n(a)}$为 $n(a)$维欧氏空间中的单位球体，f 将 $D^{n(a)}$的内部同胚地映成 e_a. f 称为胞腔e_a 的特征映射.

(ii) 属于闭包 $\bar{e}_a$ 而不属于e_a 的每个点 x 必位于某个较低维数的胞腔e_β 中.

(iii) **闭包有限性**. K 的每个点必只被包含在一个有限子复形中.

(iv) **弱拓扑**. K 的拓扑是其有限子复形拓扑的顺向极限. 即 K 的子集是闭的，当且仅当它与每个有限子复形之交是闭的.

H. Miyazaki 于 1952 年 [Miy] 证明了，每个 CW 复形都是仿紧的. 而 J. Milnor 于 1959 年 [Mi 9] 证明，当 Y 是任意紧空间，X 是有 CW 复形的伦型时，连续映射空间 $C(X, Y)$ 具有 CW 复形的伦型. 这说明 CW 复形很适用于同伦论.

关于 (iv) 中弱拓扑的称呼是 J. H. C. Whitehead 采用的，但 J. Milnor 不同意这样，他在《示性类》[Mi-S] 一书的 63 页脚注中认为，这里的“弱”是指有较多的开集，这与分析学家的弱拓扑意义相反. 他认为应采用“细拓扑”，“大拓扑”或“Whitehead 拓扑”. 在该书的 73～74 页给出 CW 复形定义时，他就采用“Whitehead 拓扑”. 其实 J. L. Kelley 于 1955 年专为“青年分析学家须知”而写的《一般拓扑学》[K] 的 38 页，就议论过这件事. 当然，最好今后避免使用强或弱这种词，而当遇到别人用时，冷静些先弄清其涵义即可. 好在，即使采用“闭包有限并具怀德海拓扑的复形”，其缩称仍为 CW 复形.

第九章　同伦群与同伦论

同伦是连续形变这一直观说法的拓扑学定义．Poincaré 运用同伦定义了基本群，这是第一个用群表述的拓扑不变量．他同时定义的同调则并未用群表述，而是用 Betti 数，后来补充了挠系数．基本群的拓扑不变性是显然的，而说明同调的拓扑不变性是极为困难的．对此，我们在第四章中已详细介绍，其中用到了第三章中介绍的由 Brouwer 引进的单纯逼近．这里包含着同伦概念在内．事实上，Brouwer 是正式定义同伦概念的第一位数学家．

但直到 20 世纪 30 年代以前，同伦概念在拓扑学中处于一个辅助的地位．1930 年代，随着 Hopf 不变量的发现，Hurewicz 定义了高维同伦群，同伦论迅速成为代数拓扑学的主流．此后的一段长时期，代数拓扑学可以被理解为这样一个学科，许多重要课题来自同伦论，而它们的解决通常需要借助可计算性更强的同调论，并同时将同伦与同调应用于流形理论．

§9.1　基本群与复叠空间

基本群（fundamental group），复叠空间（covering space）和纯不连续群（properly discontinuous group）是现代数学中三个相互关联的重要概念．三者中的任何一个都决定另外两个．但在历

史上出现的顺序是先有纯不连续群，再有复叠空间，最后才是基本群.

用现代数学语言来说，一个纯不连续群 G 是一个拓扑空间 X 的自同胚组成的一个群，具有下述性质：对任意 $x \in X$，存在 x 的一个开邻域 U 使得对任意两个不同的元素 s，$s' \in G$ 而言，交集 $s \cdot U \cap s' \cdot U = \varnothing$. 由此可知，对任意 $x \in X$，x 的轨道 $G \cdot x$ 是 X 中的一个离散子集，并且映射 $s \mapsto s \cdot x$ 将 G 映成 $G \cdot x$ 是一个一一对应.

在 19 世纪 Gauss 时代，就用到了纯不连续群，例如 $\mathbf{C}$ 中的整变换群 $z \mapsto z + m\omega_1 + n\omega_2$，其中 m，n 为整数，而 ω_1，ω_2 为复常数，满足 ω_1/ω_2 不是实数. Gauss 用它来研究椭圆函数. Guass 在研究模函数(modular functions)时用到了半平面Re $z > 0$ 上的变换 $z \mapsto (\alpha z - \beta i)/(r + \delta iz)$所成的群，其中 α，β，γ，δ 均为整数，满足 $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. Gauss 还引进了基本区域（fundamental domain）的概念：X 的子集 D，使得 D 中任意两个不同点都不属于G 之下的同一轨道，并且，对所有 $s \in G$ 得到的不相交的子集 $s \cdot D$，形成 X 的一个分解. Riemann 及后继者 Dedekind，Klein，H. A. Schwarz，I. L. Fuchs 等人，也研究了更多的纯不连续群及它们的基本区域. 后来在 Poincaré 手中形成了关于富克斯群和克莱因群的一般理论.

Riemann 首先心中有了复叠空间的观念，虽然他只讨论了曲面. 他为了解决多值函数单值化而设计的黎曼曲面，实际上是“有分枝的复叠空间”. 若将其分枝点去掉，则得到现在的复叠空间概念. 后来，Schwarz，Klein 和 Poincaré [P 12; 147] 运用 $\mathbf{C}$ 中某开子集 U 的同胚所成的一个纯不连续群 G 的基本区域 F，将其边界粘连而构作曲面 K，U 是基本区域 F 在 G 中诸变换之下像的并集，它是曲面 K 的一个复叠空间，而 F 经由 G 中诸变换而得复叠空间中的“层（sheets)”. 类似的做法可用来定义有分枝的复叠空间，它的 U 中有若干点是 G 中至少一个非恒等元

的不动点．总而言之，用现代语言来说，K 是轨道空间 U/G．还值得指出的是，Poincaré 还定义了万有复叠空间（universal covering space）的概念．

复叠空间的现代定义如下．设 X 和 Y 是道路连通空间，p: $Y \to X$ 是连续映射．如果对于每一点 $x \in X$，都有一个开邻域 U，使得 $p^{-1}(U)$ 是 Y 中不相交的开集 V_a 之并，每个 V_a 在 p 之下同胚地映成 U，则 p 称为一个复叠投射，（Y，p）或 Y 称为 X 的一个复叠空间．

最后，是 Poincaré 在 1895 年的 Analysis Situs [P 2] 中，对连通的流形 X 引进了基本群概念．其定义与我们现在采用的本质上一样，用到以固定点 a 为起点和终点的环路，以保持固定起终点不动的形变（同伦）为等价关系，以环路的先后连接作为合成运算，所得的等价类在合成运算之下所成的群，称为 X 在点 a 处的基本群，现在我们记作 $\pi(X,a)$ 或 $\pi_1(X,a)$．

关于复叠空间最重要的事实，是所谓道路提升和同伦提升定理．看来，Poincaré 和他的后继者们，如 Tietze 和 Dehn，都知道这个事实，虽然他们并未明确写出．对曲面情形的这个定理，首先是由德国数学家 H. Weyl 于 1913 年在 [Wey 1] 中陈述并证明的．K. Reidemeister 于 1928 年发表了一篇短文 [Rei 1]，论及基本群与复叠空间，他只限于讨论三维组合流形，并且没有陈述提升定理，直到 1934 年，在 Seifert-Threlfall 的书 [Se-T 1] 中，才以提升定理为基础透彻地给出了基本群和复叠空间之间的关系．虽然他们限于讨论局部有限的任意维的单纯复形，但只需作一些小的变动，即可推广到更一般的空间，其基本理论简介如下：

A. 设 Y 是 X 的一个具有投射 p 的复叠空间，并且 $a \in X$ 是任意点，基本群 $\pi_1(X,a)$ 自然地作用于 $p^{-1}(a)$ 上．对于 X 中任何以 a 为起点的环路 γ，和任何点 $b \in p^{-1}(a)$，存在 Y 中以 b 为起点的唯一的道路 γ_b，使得 $p \circ \gamma_b = \gamma$．并且，如果 γ' 是

X 中以 a 为起点的同伦于 γ 的环路，则对应的道路 γ_b' 是同伦于 γ_b 的. 因此，由于 $p^{-1}(a)$是离散的，γ_b' 和 γ_b 有着相同的终点，从而终点只依赖于 b 和 γ 的同伦类 $u\in\pi_1(X,a)$而可以写作 $b\cdot u$. 不难验证，$(b\cdot u)\cdot v=b\cdot(uv)$,对 $\pi_1(X,a)$中任意两元素 u 和 v 成立. 因此 $\pi_1(X, a)$ 右作用于 $p^{-1}(a)$.

B. 基本群是所有道路连通拓扑空间和连续映射所成的范畴上的一个协变函子. 对于任意连续映射 f: $X\to X'$和 X 中以 a 为起点的环路 γ，则 $f\circ\gamma$ 是 X' 中以 $f(a)$ 为起点的环路. 若 γ_1 和 γ_2 是 X 中以 a 为起点并在 X 中同伦的两个环路，则 $f\circ\gamma_1$ 和 $f\circ\gamma_2$ 是 X' 中同伦的环路. 因此得到一个映射 f_*：$\pi_1(X,a)\to\pi_1(X',f(a))$,它将 $\pi_1(X,a)$中任意类 u，映成 u 中任意环路 γ 对应的环路 $f\circ\gamma$ 在 $\pi_1(X',f(a))$中代表的类. 不难验证，f_* 是一个群同态.

C. 设 X 是道路连通空间，Y 是 X 的复叠空间，且 p：$Y\to X$ 是投射，为使 Y 是道路连通的充分必要条件是，对于一点 $a\in X$，$\pi_1(X,a)$在 $p^{-1}(a)$上的作用是可递的. 从而，对于任意 $b\in p^{-1}(a)$，同态

$$p_*:\pi_1(Y,b)\to\pi_1(X,a) \tag{1}$$

是单射，并且其像是点 b 在$\pi_1(X,a)$作用于 $p^{-1}(a)$上的稳定子 S_b. 如果 $b'=b\cdot u$ 是$p^{-1}(a)$中另一点，$u\in\pi_1(X,a)$，则点 b' 的稳定子 $S_{b'}$ 与点 b 的稳定子 S_b 之间有关系 $S_{b'}=u^{-1}S_bu$，即 $p_*\pi_1(Y,b)$与 $p_*\pi_1(Y,b')$在 $\pi_1(X,a)$中互相共轭.

D. 设 X，Y 均为道路连通空间，Y 是 X 的复叠空间，以 p：$Y\to X$ 为投射. 设 Z 是道路连通空间，f：$Z\to X$ 是连续映射，且设 $c\in Z$，使$f(c)=a$. 若存在$\tilde{f}$：$Z\to Y$，使得 $p\circ\tilde{f}=f$，设$\tilde{f}(c)=b$ 且$a=p(b)$，则

$$f_*\pi_1(Z,c)\subset p_*\pi_1(Y,b). \tag{2}$$

反之，由此条件推得，如果两条道路 γ，γ'连接点c 到点 $z\in Z$，

则 $f\circ\gamma$ 和 $f\circ\gamma'$ 在 Y 中以 b 为起点的两条提升的道路有相同的终点.

E. 若 X 是道路连通且局部道路连通空间，并且 Y 和 Y' 是 X 的分别以 p 和 p' 为投射的道路连通复叠空间，$b\in Y$，$b'\in Y'$，使得 $p(b)=p'(b')=a$. 则存在连续映射 q：$Y'\to Y$，使得 $q(b')=b$, Y' 是 Y 的以 q 为投射的复叠空间，且 $p'=p\circ q$ 的充分必要条件是 $p'_*\pi_1(Y',b')$ 共轭于 $p_*\pi_1(Y,b)$ 的一个子群. 特别，(Y',p') 与 (Y,p) 同构的充要条件是，$p'_*\pi_1(Y',b')$ 与 $p_*\pi_1(Y,b)$ 在 $\pi_1(X,a)$ 中共轭.

F. 设 X 对于每个点 $x\in X$，存在一个包含 x 的开集 V，使得 V 中任意以 x 为起点的环路在 X 中同伦于取值 x 的常道路，则称 X 为局部半单连通的. 设 X 是道路连通的，局部道路连通的且局部半单连通的，$a\in X$. 设 H 是 $\pi_1(x,a)$ 的任意子群. 则存在 X 的一个复叠空间 (Y,p)，使得 $p_*\pi_1(Y,b)=H$, 其中 $b\in Y$, 使得 $p(b)=a$. 特别，若 $H=$ 平凡子群，则 Y 是单连通的，这种 (Y,p) 称为 X 的万有复叠空间. 这里证明了万有复叠空间的存在性. 由 (E) 可知其唯一性. 顺便提醒读者，为保证万有复叠空间的存在性，X 的局部半单连通性是必要的，因而不是过分的要求.

G. 若 X 和 Y 是道路连通空间，(Y,p) 是 X 的复叠空间，Y 到自身的一个同胚 f 称为 (Y,p) 的一个复叠变换，若 $p\circ f=p$. (Y,p) 的所有复叠变换在复合之下成为一个群，记作 $\mathrm{Aut}_X(Y)$，称为 (Y,p) 的复叠变换群. 设 (Y,p) 的复叠变换 f 将 $p^{-1}(a)$ 中点 b 变为点 $f(b)=b'$. 则有 $f_*\pi_1(Y,b)=\pi_1(Y,b')$，且 $p_*\pi_1(Y,b)=p_*\pi_1(Y,b')$，即点 b 和点 b' 有相同的稳定子：$S_b=S_{b'}$. 由(C)可知 $S_b=u^{-1}S_{b'}u$. 故 u 必属于 S_b 在 $\pi_1(X,a)$ 中的正规化子 $N(S_b)$ 之中. 由此可知，$\mathrm{Aut}_X(Y)\cong N(S_b)/S_b$.

特别，若对于某个点 $b\in p^{-1}(a)$，$p_*\pi_1(Y,b)$ 是 $\pi_1(X,$

a)中的一个正规子群，则(Y, p)称为 X 的一个正则复叠空间. 设(Y, p)是局部半单连通空间 X 的一个正则复叠空间，则复叠变换群 $\mathrm{Aut}_X(Y)$同构于商群$\pi_1(X, p(b))/p_*\pi_1(Y, b)$. X 的正则复叠空间(Y, p)也被称为 X 的"伽罗华复叠空间". 同时 $\mathrm{Aut}_X(Y)$也被称为(Y, p)的"伽罗华群"，因为，若将正则复叠空间比作一个域的可分代数闭包，把复叠变换群比作对应的伽罗华群，则这里也有类似于伽罗华理论基本定理的定理：若(Y, p)和(Z, q)是 X 的正则复叠空间，(Y, r)是 Z 的正则复叠空间，三者的复叠变换群分别是 G，K，H，则 $K \cong G/H$.

由此可见，当把基本群与复叠空间理论结合起来后，便获得一套深刻而完美的理论. 读者可参阅［Gr-H］，［Mas 3］，［Si-T］或［Sp 3］.

§9.2 基本群的计算和基本性质

基本群的定义并不复杂，但计算却并不容易. 这里我们介绍有关基本群的一些最重要的基本性质，它们是有助于基本群的计算的.

A. 基本群与一维同调. Poincaré 虽然没有对同调采用群的概念，但他在 1895 年的 Analysis Situs［P 2］中，已经直接表述了下述结论. 他先说，在基本群$\pi_1(X, a)$中，若有公共点的闭曲线c_j($1 \leqslant j \leqslant m$)的类 s_j 之间有关系

$$s_1^{\alpha_1} s_2^{\alpha_2} \cdots s_m^{\alpha_m} = Id, \quad \alpha_j \in \mathbf{Z}, \tag{3}$$

则此关系给出了 c_j 之间的一个"同调"

$$\alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \cdots + \alpha_m c_m \sim 0. \tag{4}$$

Poincaré 接着断言，所有1维的"同调"均可如此得到. 这个断言的现代精确表述是，$\pi_1(X, a)$的交换化同构于1维同调群$H_1(X; \mathbf{Z})$.

如今，这已是代数拓扑学标准教科书中的一个重要定理.

B. 若给了两个定基点空间(X,x_0)和(Y,y_0)，则可构作它们的定基点的乘积空间$(X\times Y,(x_0,y_0))$. 存在一个自然的同构

$$\pi_1(X\times Y,(x_0,y_0))\cong\pi_1(X,x_0)\times\pi_1(Y,y_0). \qquad (5)$$

C. 由§9.1之(F)可知，若 X 和 Y 均为道路连通的，Y 是单连通的，且(Y,p)是 X 的复叠空间，则(Y,p)是 X 的万有复叠空间. 此时(Y,p)的复叠变换群 $\mathrm{Aut}_X(Y)\cong\pi_1(X,a)$. 若 $\mathrm{Aut}_X(Y)$可计算，则 $\pi_1(X,a)$可计算. 例如圆周 S^1 可视为 $\mathbf{R}$ 在平移群 $\mathbf{Z}$ 之下的商空间，即 $\mathbf{R}$ 是 S^1 的万有复叠空间，复叠变换群为 $\mathbf{Z}$，故$\pi_1(S^1,a)\cong\mathbf{Z}$.

D. 虽然 Poincaré 列举过少数基本群的例子，但他并无完整的证明. 对于单纯复形，Tietze 于 1908 年［Ti］给出计算基本群的算法. 设对所论空间给定了一个单纯的三角剖分 T，有限或无限均可. 设基点 x_0 是 T 的一个 0 维单形. 只考虑 T 中以点 x_0 为起点和终点的棱环路，即其像是展布在 T 的若干条棱(一维单形）上的环路. Tietze 认为（没有证明，因为那时同伦的确切概念尚未定义)，任意以 x_0 为起点的环路同伦于一个如此的棱环路. 然后，Tietze 用到 Dehn 和 Heegaard 在［D-H］中定义的组合方法：在若干个棱环路的并列式子 $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_r$ 中，当出现先后相邻两棱为相反时，如$(vv')(v'v)$，或相继三棱$(vv')(v'v'')(v''v)$而使 v，v'，v''为 T 中某二维单形之顶点时，将它们删除而得组合同伦之棱环路. 从而$\pi_1(X,x_0)$只依赖于 T 的二维骨架 T^2. Tietze 的这个做法可以用 Alexander 的单纯逼近法予以证明，这在 Seifert-Threlfall 的书［Se-T］中给出了细节. 读者还可参考［Si-T］和［Sp 3］.

E. **Seifert-van Kampen 定理**. 若 X 是道路连通空间，且 X_1 和 X_2 是 X 的两个道路连通的开子空间，使得 $X=X_1\cup X_2$. 如果开子空间 $X_0=X_1\cap X_2$ 非空且道路连通. 设 i_1：$X_0\to X_1$ 和 $i_2:X_0\to X_2$ 是包含映射. Seifert 于 1931 年［Se 1］，van Kam-

pen则稍晚一些［vK］，独立地证明了，对于$x_0 \in X_0$，$\pi_1(X, x_0)$自然同构于自由乘积$\pi_1(X_1, x_0) * \pi_1(X_2, x_0)$关于当$u$取遍$\pi_1(X_0, x_0)$时由形如$i_{1*}(u)i_{2*}(u^{-1})$的元素生成的正规子群之商群．这个定理很有用处，关于它的证明，读者可在［Se-T 1］中找到基于单纯复形的讨论，一般的处理可参考［Mas 3］，那里有一个透彻的讨论．

F．**图的基本群与群论**．图（graph）乃1维单纯复形．设K是一个连通的图，则其基本群$\pi_1(K, x_0)$是自由群．这由(D)中Tietze的作法及K中无2维单形可证明．反之，任意自由群可实现为（同构于）一个连通图的基本群．用这个办法，可以容易地证明O. Schreier于1927年［Schr 3］中用纯代数方法证明的重要事实：自由群的子群是自由群．设自由群G同构于连通图K的基本群$\pi_1(K, x_0)$，而H是G的子群．由§9.1的(F)知，存在K的一个连通的复叠空间K'，其基本群$\pi_1(K', x_0')$同构于H．因为图的复叠空间必为图，因此H是自由的．

Dehn于1912年在［D 2］中提出群图（德 Gruppenbild），理论上说，可以使我们对每一个群都能看得见．设群G由有限个元素$g_j(1 \leqslant j \leqslant n)$生成，取以$G$为指标集的一个集合$\{M_s\}_{s \in G}$．定义图$\Gamma(G)$，以$M_s$为其顶点，对每个$s \in G$，有$2n$个棱以$M_s$为公共顶点：$S_j(s) = (M_s, M_{sg_j})$，$S_j^{-1}(s) = (M_s, M_{sg_j^{-1}})$．一个乘积$g_{j_1}^{\varepsilon_1} g_{j_2}^{\varepsilon_2} \cdots g_{j_k}^{\varepsilon_k}$，其中$\varepsilon_i = \pm 1$，$1 \leqslant j_i \leqslant n$，对应以$M_s$为起点的一个棱道路$S_{j_1}^{\varepsilon_1}(s) S_{j_2}^{\varepsilon_2}(s g_{j_1}^{\varepsilon_1}) \cdots S_{j_k}^{\varepsilon_k}(s g_{j_1}^{\varepsilon_1} g_{j_2}^{\varepsilon_2} \cdots g_{j_{k-1}}^{\varepsilon_{k-1}})$．生成元之间的关系$g_{j_1}^{\varepsilon_1} g_{j_2}^{\varepsilon_2} \cdots g_{j_p}^{\varepsilon_p} = e$恰对应于$\Gamma(G)$中的以$M_s$为起点的棱环路．如果$G$是一个单纯复形$X$的基本群$\pi_1(X, a)$，Reidemeister在［Rei 1］中提出，取$(\tilde{X}, p)$为X的万有复叠空间，取$p^{-1}(a)$的点为M_s．如果g_j是以a为起点的环路，它们生成$\pi_1(X, a)$，则$S_j(s)$是以M_s为起点的道路，它经p投射下来得g_j．

G．***H*** **空间的基本群**．设空间X中有一个连续的合成律m：

$X\times X\to X$，通常记作$m(x,y)=x\cdot y$，且 X 中有一个“同伦中性元素”e，使得$e\cdot e=e$，且对任意$x\in X$，映射$x\mapsto x\cdot e$及$x\mapsto e\cdot x$均同伦于恒等映射，这种空间首先由 H. Hopf 于 1936 年研究过［Hop 10］，现今称为 H 空间. 对于 H 空间 X 而言，容易证明其基本群$\pi_1(X,a)$必是交换群.

§9.3 Hopf 的工作

同伦概念的确切定义是 Brouwer 于 1911 年［Br 7；462］给出的，但长期以来是一个辅助概念. 基本群的定义虽然用到同伦，但仍只作为一维同调的一种更为精细的说法，其重要性尚待发现. 直至 Hopf 的一系列工作的发表，特别是 1930 年前后的几篇文章，开启了同伦论成为拓学的研究主流的历史. 现将 Hopf 这一时期的主要贡献介绍于下.

A. **Brouwer 猜测**. Brouwer 于 1912 年的国际数学家大会上的报告中提出了一个猜测，他说他相信如果 M 是一个连通的可定向的紧的 n 维流形并且 f 和 g 是从 M 到 S^n 的两个具有相同的映射度的连续映射，则 f 和 g 是同伦的. 在报告中 Brouwer 对 $n=2$ 并且 $M=S^2$ 给出一个证明的概述，而在第二年发表了详细证明［Br 7；527～553］. Brouwer 的上述一般的猜测到 1926 年才由 Hopf 证明［Hop 1］. 这是一个被认为是机智而复杂的长证明，在很大程度上受到 Brouwer 的技术的启示但比较精确. 设 M 是一个连通的可定向的紧的 n 维组合流形，f 和 g 是从 M 到 S^n 的两个连续映射. Hopf 利用 Brouwer 的同维数球面映射的度来定义，当$f(x)=g(x)$时，f 和 g 在点 $x\in M$ 的重合指数，并证得若重合点为有限个，则重合指数之和等于$(-1)^n\deg(f)+\deg(g)$. 进而用对维数 n 的归纳法来完成证明. Hopf 为这个猜

测补充了下面重要事实：对于任意 $d\in \mathbf{Z}$，存在一个连续映射 f：$M\to S^n$ 使 $\deg(f)=d$．其证明是先设 $M=S^n$，并对 $n=1$ 采用映射 $z\mapsto z^d$，再利用双角锥而对一般的 n 构作成 f，使 $\deg(f)=d$；再设法对一般的 M 借助 M 的一个三角剖分，定义一个连续映射 f：$M\to S^n$ 使 $\deg(f)=\pm 1$．有关这个重要定理的现代证明，读者可参考［Hu 2］．

B．**Hopf 不变量**．非零的 Hopf 不变量的发现是 Hopf 的划时代的工作．直到 1930 年前，人们只着重研究相同维数的流形之间的连续映射的同伦问题．随着研究的深入，Hopf 很自然地转向连续映射 f：$M\to S^n$，其中 M 是一个紧的 m 维组合流形且 $m\neq n$．对于 $m<n$，利用单纯逼近可设 $f(M)$ 不充满整个 S^n，从而可用一个伦移，使 f 同伦于一个常映射，因此这种情形是平凡的．对于 $m>n$ 的情形，在 1930 年前，除 $n=1$ 之外，一切无人知晓，甚至对 f：$S^m\to S^n$ 亦一无所知．由于 f 诱导的同调群同态 f_*：$H_m(S^m)\to H_m(S^n)$ 是零同态，人们可能企望 f 是同伦于一个常映射的．Hopf 在 1930 年［Hop 7］做出的一项使人们大为惊讶的突破，是证明了从 S^3 到 S^2 存在不同伦于常映射的连续映射，实际上存在无限多个连续映射的同伦类，与 $\mathbf{Z}$ 有一个自然的一一对应，对应的整数值称为 Hopf 不变量．当时的证明很长，有 14 页，用到许多技巧，但很清晰．后来在 1935 年 Hopf 发表［Hop 9］，他的上述研究可以不难推广到连续映射 f：$S^{2n-1}\to S^n$．现在教科书上的证明则纳入已充分发展起来的同伦理论之中，读者可参阅［Hu 2］，［WhG］或［Ste 8］．

§9.4　同伦理论基本概念的产生

A．**同伦与延拓**．同伦和伦移的定义由 Brouwer 于 1911 年

给出，虽然它的直观的观念形变（deformation）早在 J. Lagrange 时代的变分学中已经出现并被使用，或许还可追溯到更早，如 Leibniz. 另外一个基本的概念叫延拓（extension）. 设 X，Y 是拓扑空间，A 是 X 的子空间，f: $A\to Y$ 是连续映射，j: $A\to X$ 是包含映射. 连续映射 g: $X\to Y$ 称为 f 的一个延拓，若 $g|A=f$ 或 $g\circ j=f$. 延拓可用来表述伦移的存在性. 设 f，g: $X\to Y$ 是给定的两个连续映射. 令 $A=(X\times\{0\})\bigsqcup(X\times\{1\})$. A 是 $X\times[0,1]$ 的一个子空间. 记 G: $A\to Y$ 为 $G(x,0)=f(x)$ 及 $G(x,1)=g(x)$. 则 f 和 g 之间的一个伦移 F 恰是映射 G 到整个 $X\times[0,1]$ 上的一个连续的延拓. 这是 Hopf 在 1933 年的文章［Hop 8］中指出的. 从此连续映射的延拓问题便成为代数拓扑学的主题之一.

B. **收缩核**. 从空间 X 到其一子空间 A 的一个保核收缩（retraction）是一个连续映射 r: $X\to A$，满足 $r(x)=x$ 对 $x\in A$. 若 j: $A\to X$ 为包含映射，这个定义表示 $r\circ j$ 是 A 上的恒等 1_A，或说 r 是 j 的"左逆". X 的子空间 A 称为 X 的一个收缩核（retract），如果存在着从 X 到 A 的保核收缩. 这是波兰拓扑学家 K. Borsuk 在 1931 年提出来的［Bors 1］. 收缩核的一条主要性质是，若 A 是 X 的一个收缩核，则任意连续映射 f: $A\to Y$ 均有一个延拓 g: $X\to Y$，事实上取 $g=f\circ r$ 即可. 由 $r\circ j=1_A$ 可得同调群的诱导同态的关系 $r_*\circ j_*=1_{H.(A)}$. 从而可知，$(n-1)$ 维球面 S^{n-1} 不是 n 维球体 $B^n=\{(x_1,\cdots,x_n);x_1^2+\cdots+x_n^2\leqslant 1\}$ 的一个收缩核. 由这个命题，可以容易地证明 Brouwer 不动点定理. 现代教科书上通常采用这个证明. 随后，Borsuk 于 1932 年引进另外几个重要概念［Bors 2］：绝对收缩核（absolute retract），邻域收缩核（neighbourhood retract）和绝对邻域收缩核（absolute neighbourhood retract）等. 读者可参阅［Hu 2］或［Mu 7］，那里还可找到另外一些概念.

C. **伦型**. 伦型或两个空间同伦等价的概念出现较晚. 人们

最初只注意到空间的拓扑不变量，即对于相互同胚的空间得相同的量或者代数结构，例如同调群，基本群．后来发现它们其实关于一个更弱的等价，同伦等价，是不变的．1935 年，Hurewicz 在［Hur 1］中引进同伦等价为一个连续映射 $f: X \to Y$，如果存在一个连续映射 $g: Y \to X$，使得 $f \circ g \simeq 1_Y$ 及 $g \circ f \simeq 1_X$，则 g 称为 f 的一个同伦逆．这时，空间 X 和 Y 称为具有相同伦型或是同伦等价的．

当然互相同胚的空间具有相同的伦型，而且也容易举例说明，具有相同伦型的空间未必同胚．但对于相同维数的流形而言，具有相同伦型与同胚之间究竟有多少差异，则是一个值得关注的问题．作为例子，我们介绍透镜空间（lens spaces）的分类．早在 1904 年［P 7］，Poincaré 构作出基本群非平凡，而 1 维同调群平凡的 3 维流形时，他就认识到基本群不足以确定可定向的流形到相互同胚．接着在 1908 年，Tietze［Ti］定义了透镜空间如下．对于任意奇素数 p 及满足 $0 \leqslant q \leqslant p-1$ 的整数 q，将 $\mathbf{R}^3$ 中的单位球体 B^3 的表面 S^2 用循环群 $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ 作用如

$$(k,(\varphi,\theta)) \mapsto \left(\varphi + \frac{2kq\pi}{p},(-1)^k\theta\right), \tag{6}$$

其中 $k \in \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$，$(\varphi,\theta)$表 S^2 上点的经度和纬度．所得商空间记作$L(p,q)$，是一个 3 维的紧的无边流形．由复叠空间理论便知，$L(p,q)$的基本群是 $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$，从而知其整系数 1 维同调群 $H_1(L(p,q);\mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$. Tietze 曾猜想，$L(5,1)$与 $L(5,2)$是不同胚的．这后来由 Alexander 于 1919 年证明［Al 2］. Alexander 还证明，对于$L(p,q)$和 $L(p,q')$，同胚的必要条件，是存在某个整数 v，使得 $q' \equiv \pm v^2 q \pmod p$. J. H. C. Whitehead 于 1940 年证明，这个条件是$L(p,q)$与 $L(p,q')$有相同的伦型的充分而且必要的条件［WhH 4］.

D. **Lusternik-Schnirelmann 畴数**．大约 1930 年，为研究大范围的变分学问题，苏联数学家 L. A. Lusternik 和 L. G.

Schnirelmann合作［Lu-Sch］［Sch］，引进空间 X 的子空间 A 的一个数字不变量 $\text{cat}_X(A)$．X 的非空子空间 Y 称为在 X 中可形变到一点，如果包含映射 $Y\to X$ 在 X 中同伦于一个常值映射 $Y\to\{a\}$，其中 a 是 X 中某点．如果 A 是 X 中有限个可形变到一点的子空间之并，则这个数目中最小者记作 $\text{cat}_X(A)$；否则便说 $\text{cat}_X(A)=+\infty$．这个 $\text{cat}_X(A)$ 称为 A 在 X 中的 Lusternik-Schnirelmann 畴数（category）．特别，$\text{cat}_X(X)$ 简记为 $\text{cat}(X)$．$\text{cat}(X)=1$ 表示 X 是一个可缩空间．若 A，B 均为 X 的子空间，则 $\text{cat}_X(A\cup B)\leqslant\text{cat}_X(A)+\text{cat}_X(B)$；若 $A\subset B$，则 $\text{cat}_X(A)\leqslant\text{cat}_X(B)$．若 X，Y 均为道路连通空间且有有限的畴数，则

$$\sup(\text{cat}(X),\text{cat}(Y))\leqslant\text{cat}(X\times Y)\leqslant\text{cat}(X)+\text{cat}(Y)-1.\quad(7)$$

即使空间 X 道路连通且单连通，也存在 $A\subset X$，使得 $\text{cat}_X(A)>1$．这是一个较同调更精细的不变量．例如，对任意 $n\geqslant1$，有 $\text{cat}(S^n)>2$．而对于 Poincaré 流形 P，Borsuk 证明［Bors 4］$\text{cat}(P)>2$．这也可如下证明，若 $\text{cat}(X)\leqslant2$，则 $\pi_1(X)$ 是一个自由群［Fo 1］．关于这个课题早期的进展，可参考［Fo 1］，后来的进展可参考［J 4］．

§9.5 同伦群

虽然可以视为一维同伦群的基本群于 1895 年已正式定义，但它的高维同类直到 1935 年莫斯科国际拓扑学会议上，才由 Hurewicz［Hur 1］正式提出．时间跨度之大长达 40 年，这是一个值得思索的事情．因为，从 Poincaré 采用 S^1 到 X 的连续映射的同伦类，推广到 S^n 到 X 的连续映射的同伦类，应当不是一件难事．据说，不少人都称他们也想到了．J．Dieudonné［Di 2；

274] 说，Čech 于 1932 年做了上述之事，并且 Čech 说，Dehn 更早考虑过此定义但未发表. Whitney 在关于 1935 年莫斯科国际拓扑学会议的回忆 [Why 16] 中说，当 Hurewicz 在报告中定义了不同维数的同伦群，并给出若干简单而重要的应用后，Alexander 说他曾于许多年前考虑过这个定义，但因认为性质上过于简单不能导致深刻结果而放弃了. Whitney 这时评论道："看来这是一个教训，即使是简单的东西也可能有某种价值，特别当把它们推进到充分远以后". 他还讲到，Čech 和 D. van Danzig 也说，他们都曾想到或者用到了 Hurewicz 的定义.

1935 年 Hurewicz 的定义方式是归纳的，我认为，或许这正是其特殊之点和有用之处. 设 X 是一个拓扑空间，$x_0 \in X$ 是一个取定的点，称为基点. 用 $\Omega(X, x_0)$ 表示所有环路 $(S^1, 1) \to (X, x_0)$ 所成的集合，赋以紧开拓扑所得的拓扑空间，其中 S^1 认为是 $\mathbf{C}$ 中的单位复数所成的子集. 记 $x_1 : S^1 \to \{x_0\}$ 为常值环路. 于是，Hurewicz 考虑基本群 $\pi_1(\Omega(X, x_0), x_1)$，并发现此做法可以归纳地重复下去. 因此令

$$\Omega^p(X, x_0) = \Omega(\Omega^{p-1}(X, x_0), x_{p-1}), \tag{8}$$

其中 x_{p-1} 为常值映射 $S^1 \to \{x_{p-2}\}$；基本群

$$\pi_1(\Omega^{p-1}(X, x_0), x_{p-1}) \tag{9}$$

称为 (X, x_0) 的第 p 维同伦群，并记为 $\pi_p(X, x_0)$. 由于 $\Omega(X, x_0)$ 是一个 H 空间，而 H 空间的基本群是交换的(参见 §9.2 的(G))，从而当 $p \geqslant 2$ 时，$\pi_p(X, x_0)$ 是交换群，此时群中运算记作加法.

接着，Hurewicz 用类似的方法，对 $n \geqslant 2$，定义了相对同伦群 $\pi_n(X, A, x_0)$，其中 $A \subset X$，$x_0 \in A$. 当 $n \geqslant 3$ 时 $\pi_n(X, A, x_0)$ 是交换群，亦记作加法群. 然后，他发现，对 $n \geqslant 2$ 有一个自然的群同态

$$\partial : \pi_n(X, A, x_0) \to \pi_{n-1}(A, x_0). \tag{10}$$

以上所得均为协变函子.

到了 1945 年，J. H. C. Whitehead 证明了同伦群及其同态组成的序列

$$
\begin{aligned}
&\cdots\longrightarrow\pi_{n+1}(X,A,x_0)\xrightarrow{\partial}\pi_n(A,x_0)\xrightarrow{j_*}\\
&\pi_n(X,x_0)\xrightarrow{i_*}\pi_n(X,A,x_0)\xrightarrow{\partial}\\
&\pi_{n-1}(A,x_0)\xrightarrow{j_*}\cdots\longrightarrow\pi_1(x,x_0)\xrightarrow{i_*}\\
&\pi_1(x,A,x_0)\xrightarrow{\partial}\pi_0(A)\longrightarrow\pi_0(X)
\end{aligned}
\tag{11}
$$

是正合的，虽然最后三项没有群结构，其中 $i:(X,x_0)\rightarrow(X,A)$ 和 $j:(A,x_0)\rightarrow(X,x_0)$ 都是包含映射.

§ 9.6 Hurewicz 同态和 Hurewicz 定理

Hurewicz 1935 年论文中的第二篇［Hur 2］论及同伦群 $\pi_n(X,x_0)$ 与整系数奇异同调群 $H_n(X;\mathbf{Z})$ 之关系（他当时只涉及度量空间及 Vietoris 同调，但在一脚注中申明，可用于奇异同调）. 他首先将 Poincaré 的看法 $\pi_1(X,x_0)\rightarrow H_1(X,x_0)$ 推广，定义了一个自然的同态

$$h_n:\pi_n(X,x_0)\rightarrow H_n(X;\mathbf{Z}),\tag{12}$$

现今称为 Hurewicz 同态.

道路连通空间 X 称为 n 连通的，如果对于 $1\leqslant i\leqslant n$，有 $\pi_i(X,x_0)=0$. 在这篇文章中，Hurewicz 证明了一个非常重要的定理，现今通称 Hurewicz 同构定理：若道路连通空间 X 是 $(n-1)$ 连通的，$n\geqslant2$，则 h_n 是一个同构.

Hurewicz 同态也可对相对的同伦群和相对奇异同调群来定义

$$h_n: \pi_n(X, A, x_0) \to H_n(X, A; \mathbf{Z}), n \geqslant 2. \tag{13}$$

从而，也得到同伦群正合序列与奇异同调群正合序列之间的同态

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots \to \pi_{n+1}(X, A, x_0) & \to & \pi_n(A, x_0) & \to & \pi_n(X, x_0) & \to & \pi_n(X, A, x_0) & \to \cdots \\
\downarrow h_{n+1} & & \downarrow h_n & & \downarrow h_n & & \downarrow h_n & \\
\cdots \to H_{n+1}(X, A; \mathbf{Z}) & \to & H_n(A; \mathbf{Z}) & \to & H_n(X; \mathbf{Z}) & \to & H_n(X, A; \mathbf{Z}) & \to \cdots,
\end{array} \tag{14}$$

此图表是交换的.

道路连通空间偶对(X, A)称为 n 连通的，如果对于所有$2 \leqslant i \leqslant n$ 有$\pi_i(X, A, x_0) = 0$. 空间偶对(X, A)称为 n 简单的，若$\pi_1(A, x_0)$在 $\pi_n(X, A, x_0)$上的作用是平凡的. 可以证明相对的 Hurewicz 同构定理：若空间偶对(X, A)是$(n-1)$连通的并且是 n 简单的，则 h_n 是同构.

这两个定理的详细证明是 R. Fox 于 1943 年在［Fo 2］中给出的. 读者可参考［Sp 3］.

§ 9.7 J.H.C.Whitehead 定理

1939 年，J. H. C. Whitehead［WhH 3］引进了弱同伦等价概念：连续映射$f: (X, x_0) \to (Y, y_0)$是一个 n 等价，若诱导的同态 $f_{\#}: \pi_r(X, x_0) \to \pi_r(Y, y_0)$是双射，当 $1 \leqslant r < n$，且是满射，当 $r = n$；f 是一个弱同伦等价，若它对每个 $n > 0$，是一个 n 等价.

由相对的 Hurewicz 同构定理及同伦正合序列，可导出由一个连续映射诱导的同伦群和同调群的同态之间的著名关系，Whitehead 第一定理：

(i) 若 f 是一个 n 等价，则奇异同调群之同态$f_*: H_r(X; \mathbf{Z}) \to H_r(Y; \mathbf{Z})$是双射，当 $r < n$，且是满射，当 $r = n$.

(ii) 若 X 和 Y 是单连通的，则逆命题亦真.

结论 (ii) 中的单连通性条件是不可取消的，读者可在 [Sp 3] 的 420 页找到反例.

Hurewicz 在 [Hur 4] 中，称一个道路连通空间 X 是非球面的 (aspherical)，如果 $\pi_j(X)=0$，当 $j\geqslant 2$. 如果 $\tilde{X}$ 是 X 的万有复叠空间，这等价于说，$\tilde{X}$ 对于任意 $n\geqslant 1$ 是 n 连通的. Hurewicz 发现，若 X 是一个非球面的有限单纯复形. 则 X 的伦型由其基本群决定. 其证明的要点是：对于 $[f]\in[X,x_0;Y,y_0]$，对应 $[f]\mapsto f_\#$，其中 $f_\#$：$\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(Y,y_0)$ 是由 $[f]$ 所诱导的同态，是一个从 $[X,x_0;Y,y_0]$ 到 $\mathrm{Hom}(\pi_1(X,x_0),\pi_1(Y,y_0))$ 上的双射. 从而若 X 和 Y 都是非球面的有限单纯复形，并且存在互逆的同构 $\varphi:\pi_1(X,x_0)\cong\pi_1(Y,y_0)$ 和 $\psi:\pi_1(Y,y_0)\cong\pi_1(X,x_0)$ 时，则存在 $f:(X,x_0)\to(Y,y_0)$ 和 $g:(Y,y_0)\to(X,x_0)$ 满足 $f_\#=\varphi$ 和 $g_\#=\psi$. 从而

$$g_\#\circ f_\#=1_{\pi_1(X)},\quad f_\#\circ g_\#=1_{\pi_1(Y)}. \tag{15}$$

上述双射导出 $g\circ f\simeq 1_X$ 和 $f\circ g\simeq 1_Y$，即 X 与 Y 具有相同的伦型. 而与此相对照的是，王宪钟在 [Wan 1] 中举出例子说明两个空间的各维同伦群都同构，但不一定具有相同的伦型.

J. H. C. Whitehead 于 1939 年将上述结果大大推广，而得 Whitehead 第二定理：设 X 和 Y 都是 CW 复形，则它们之间的任一弱同伦等价实际上是一个同伦等价. 关于其证明，读者可参阅 [Sp 3; 405].

将 Whitehead 的两个定理合并后可知，若 X 和 Y 是两个单连通的 CW 复形且 f：$X\to Y$ 是一个连续映射，使得 $f_*:H_.(X;\mathbf{Z})\to H_.(Y;\mathbf{Z})$ 是同构，则 f 是一个同伦等价.

§9.8 Freudenthal 双角锥定理

自从 Hurewicz 定义了同伦群以后，同伦论蓬勃发展．其中主要课题之一，是确定当 $m \geqslant n$ 时，n 维球面 S^n 的 m 维同伦群 $\pi_m(S^n)$．这成为自 1935 年以来，许多代数拓扑学重要技术和新问题产生的动机．由 Hurewicz 同构定理可以决定 $\pi_n(S^n) \cong \mathbf{Z}$．而当 $m > n$ 时，问题非常困难，它的每一进展都引起人们的关注，而且至今这些同伦群尚未完全决定．

荷兰人 H．Freudenthal 于 1937 年［Freu 1］获得一项重要进展．他引进空间 X 的未约化双角锥 $\tilde{\Sigma}X$（见 §8.3 之（B）)，并研究其性质，被认为是同伦论中的一个重大步骤．$\tilde{\Sigma}X$ 可用开集 $U_0 = \tilde{\Sigma}X \setminus \{a_0\}$ 和 $V_0 = \tilde{\Sigma}X \setminus \{a_1\}$ 覆盖，其中 a_0 和 a_1 分别表示由 $X \times [0,1]$ 中的 $X \times \{0\}$ 和 $X \times \{1\}$ 过渡到商空间而得之点．利用 Mayer-Vietoris 序列，得同构

$$\delta : H^p(X) \cong H^{p+1}(\tilde{\Sigma}X) \quad 对\ p \geqslant 1. \tag{16}$$

对 $p = 0$，应将其中 $H^0(X)$ 换成 $\tilde{H}^0(X)$．

若 x_0 是空间 X 中一给定点，将 $\tilde{\Sigma}X$ 中所有形如 $[x_0, t]$ 的点塌缩成一个点，$t \in [0,1]$，则得约化双角锥或称双角锥(见 §8.3 之(B))，记成 ΣX．设 X 是一个 CW 复形，则商映射 $\tilde{\Sigma}X \to \Sigma X$ 诱导了同调和上同调的同构．进而，易定义同纬映射（suspension）为

$$\mathrm{E} : [X, x_0; Y, y_0] \to [\Sigma X, x_0; \Sigma Y, y_0]. \tag{17}$$

特别，对于 $X = S^r$ 和 $Y = S^n$，这给出群同态

$$\mathrm{E} : \pi_r(S^n) \to \pi_{r+1}(S^{n+1}), \tag{18}$$

其中 $r \geqslant 1$ 和 $n \geqslant 1$．从而 Freudenthal 获得了重要结果：E 是一个同构，当 $1 \leqslant r < 2n-1$；E 是一个满射，当 $r = 2n-1$．这个

定理现今被称为“容易的”Freudenthal 定理. 由此得，E: $\pi_{r+k}(S^{n+k})\to\pi_{r+k+1}(S^{n+k+1})$是同构，只要 $r+k<2(n+k)-1$，即 $k>r-2n+1$，故无限序列

$$\pi_r(S^n)\xrightarrow{E}\pi_{r+1}(S^{n+1})\xrightarrow{E}\cdots$$
$$\xrightarrow{E}\pi_{r+k}(S^{n+k})\xrightarrow{E}\cdots \tag{19}$$

是稳定的：对每个 $r>0$，同伦群$\pi_{r+k}(S^k)$中只可能有有限个不同. 当 $k>r+1$ 时群 $\pi_{r+k}(S^k)$与 k 无关，称为第 r 个稳定同伦群.

§9.9 单同伦与 Whitehead 挠

1938 年，J. H. C. Whitehead 构思了一个雄心勃勃且富有创见的计划，以组合方法来研究单纯复形的同伦论 [WhH 3, 6, 9, 12, 15].

设 K 是一个有限欧氏单纯复形，σ 是 K 的一个 p 维单形，并且它是 K 中唯一的 $p+1$ 维单形 τ 的一个面. 令 K'表示从 K 中将σ 和τ 去掉后得到的复形. Whitehead 称从 K 到K'的这个过程为一个 $p+1$ 阶初等收缩，而称其逆过程为一个 $p+1$ 阶初等扩张. 如果存在一个序列的复形

$$K=K_0,\ K_1,\ \cdots,\ K_m=K',$$

使得从任何 K_i 到K_{i+1}都或者是一个初等收缩或者是一个初等扩张，则称 K'从K 或K 从K'用形式形变（formal deformation）得来，或称 K 与K'有相同的核（nucleus）.

这个概念对有限 CW 复形也可建立，并且每个有限 CW 复形都同一个同维数的有限单纯复形具有相同的核.

在 1939，1940 和 1941 年的论文中，J. H. C. Whitehead

转向代数的语言，特别接受了 Reidemeister 的观点．设 K 和 L 是 CW 复形，K^n 和 L^n 表它们的 n 维骨架，连续映射 f: $K\to L$ 称为胞腔映射，若对每个 $n\geqslant 0$ 有 $f(K^n)\subset L^n$．任意连续映射均同伦于一个胞腔映射，任意两个胞腔映射是同伦的，则也是胞腔同伦的．问题是如何从所有胞腔同伦等价中去定义那些单同伦等价．

J. H. C. Whitehead 给每个同伦等价 f: $K\to L$ 配以一个只依赖于 $\pi_1(K)$(同构于 $\pi_1(L)$)的一个交换群中的一个元素 $\tau(f)$，称为 f 的挠 (torsion)．如果 $\tau(f)=0$,则 f 称为一个单同伦等价，此时 CW 复形 K 和 L 则称为具有相同的单伦型 (simple homotopy type)．

J. H. C. Whitehead 最后证明，具有相同的单伦型的充要条件是，存在从 K 到 L 的一个形式形变．证明过程很长，很复杂，现在已有专著可资参考，如 [Co]．有关的研究已很多，例如 J. Milnor 利用 Whitehead 挠举出反例，推翻了多面体上的主猜测 [Mi 12]．

§9.10 Hopf-Hurewicz-Whitney 分类定理

我们用$[X,Y]$表示从空间 X 到空间 Y 的连续映射同伦类集合．如果 X 是 S^n，这就是同伦群概念中的集合．如果 Y 是 S^n，$[X,S^n]$的决定是同伦理论中早期最重要问题之一．

Hopf 在 1933 年 [Hop 8] 中，研究了当其中 X 是一个 n 维有限单纯复形的情形．结论是，两个连续映射 f，g 属于同一类，当且仅当它们诱导相同的同态

$$H_n(X;\mathbf{Z})\to H_n(S^n;\mathbf{Z})$$

及

$$H_n(X;\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})\to H_n(S^n;\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}),\text{对任 } m\geqslant 2.$$

必要性是同调群的基本性质之一．充分性的证明，Hopf 采用了按维数由低到高归纳地构作在 X 的 k 维骨架 X_k 上联接 $f|X_k$ 和 $g|X_k$ 的伦移的办法．这个想法很基本，后来建立阻碍理论时发挥了这个思想．Hopf 将这个构作转换为从 $X_{k-1}\times[0,1]$ 上定义的连续映射到 $X_k\times[0,1]$ 上的一个延拓问题．

Hurewicz 在 1935 年［Hur 3］中，将 Hopf 定理推广到把 S^n 换成任意 $(n-1)$ 连通的空间 Y，方法上与 Hopf 的类似．

Whitney 于 1935 年莫斯科国际拓扑学会议上，想到用上同调来表述 Hurewicz 的定理［Why 6 和 16］，而被称为 Whitney 分类定理．用现代一般写法是：设 X 是一个局部有限的胞腔复形，Y 是一个 $(n-1)$ 连通的空间，满足条件当 $j\geqslant n+1$，

$$H^j(X;\pi_j(Y))=0 \text{ 及 } H^{j+1}(X;\pi_j(Y))=0, \tag{20}$$

则有一个自然的一一对应

$$[X,x_0;Y,y_0]\cong H^n(X;\pi_n(Y)). \tag{21}$$

关于这个定理，读者可参考［Bol］和［WhG］．

§9.11　阻碍理论

Whitney 采用上同调以表述同伦分类，推动了 S. Eilenberg 在 1939 年建立了阻碍理论［Ei 2］．其实，早在 1935 年，Stiefel 和 Whitney 对纤维丛引进示性类时就做过类似的事，但当时未采用上同调．

Eilenberg 假设 X 是一个局部有限的胞腔复形，Y 是一个 n 简单空间，即道路连通且对于任意两基点 y_0，y_1 和两条从 y_0 到 y_1 的道路 c_1，c_2，所诱导的从 $\pi_n(Y,y_0)$ 到 $\pi_n(Y,y_1)$ 的同构相等，这时 Y 的第 n 个同伦群可不写基点而记成 $\pi_n(Y)$．

设已经有了从 X 的 n 维骨架 X_n 到 Y 的连续映射 f. 任取 X 中有向的 $(n+1)$ 维胞腔 τ, $b\tau$ 表示 τ 之边界，它是一个有向的 n 维拓扑球面. $f|b\tau$ 决定了 $\pi_n(Y)$ 中一个元素. 从而，由线性性决定一个 $\mathbf{Z}$ 模同态

$$c_{n+1}(f): C_{n+1}(X;\mathbf{Z}) \to \pi_n(Y), \tag{22}$$

即 $c_{n+1}(f)$ 是 X 的一个取值于 $\pi_n(Y)$ 中的 $(n+1)$ 维上链. 立即可知，$f|b\tau$ 可以延拓到 τ 上，当且仅当 $c_{n+1}(f)(\tau)=0$ 或 $\langle c_{n+1}(f), \tau\rangle = 0$. 不难验证，$c_{n+1}(f)$ 是一个上闭链，即 $\delta c_{n+1}(f)=0$，或对任意 $(n+2)$ 维胞腔 σ，有 $\langle \delta c_{n+1}(f), \sigma\rangle = 0$，它称为 f 的阻碍上闭链.

设给了两个连续映射 f_0, f_1: $X_n \to Y$ 和联接 $f_0|X_{n-1}$ 和 $f_1|X_{n-1}$ 的伦移 $G: X_{n-1}\times I \to Y$, 令 $F: (X_n\times\{0\})\cup(X_{n-1}\times I)\cup(X_n\times\{1\})\to Y$ 为 $F(x,0)=f_0(x), F(x,1)=f_1(x)$ 对 $x\in X_n$, $F|(X_{n-1}\times I)=G$. 则由 F 决定的阻碍上闭链

$$c(F)\in C^{n+1}(X\times I;\pi_n(Y)) \tag{23}$$

在 $X_n\times\{0\}$ 上与 $c_{n+1}(f_0)\times\bar{0}$ 重合，并且在 $X_n\times\{1\}$ 上与 $c_{n+1}(f_1)\times\bar{1}$ 重合，其中 $\bar{0}$, $\bar{1}$ 为 $C^0(I;\mathbf{Z})$ 中由 0 维胞腔 0 和 1 生成的 0 维上闭链. 因此

$$\begin{aligned} &c_{n+1}(F)-c_{n+1}(f_0)\times\bar{0}-c_{n+1}(f_1)\times\bar{1} \in \\ &\quad C^{n+1}(X\times I,(X\times\{0\})\cup(X\times\{1\});\pi_n(Y)). \end{aligned} \tag{24}$$

利用典则同构

$$\begin{aligned} &C^{n+1}(X\times I,(X\times\{0\})\cup(X\times\{1\});\pi_n(Y)) \\ &\cong C^n(X;\pi_n(Y)) \end{aligned} \tag{25}$$

得 $C^n(X;\pi_n(Y))$ 中一个上链，记作 $d(f_0,G,f_1)$，称为形变上链. 其主要性质有：$\delta d(f_0,G,f_1)=c(f_0)-c(f_1)$；并且 $d(f_0,G,f_1)=0$ 当且仅当 F 能延拓到 $X_n\times I$ 上.

设给了连续映射 f_0: $X_n\to Y$, g_1: $X_{n-1}\to Y$ 和联接 $f_0|X_{n-1}$ 和 g_1 的伦移 G: $X_{n-1}\times I\to Y$. 则对于任意的 $d\in$

$C^n(X;\pi_n(Y))$，存在 g_1 的延拓 f_1：$X_n \to Y$，使得形变上链

$$d(f_0, G, f_1) = d. \tag{26}$$

现在设 f：$X_n \to Y$ 是一个连续映射．则 $f|X_{n-1}$在 X_n 上的所有延拓f'的阻碍上闭链 $c(f')$组成一个上同调类

$$\bar{c}(f) \in H^{n+1}(X;\pi_n(Y)), \tag{27}$$

称为延拓 f 的初次阻碍（primary obstruction）而且 f 能延拓到 X_{n+1}上，当且仅当$\bar{c}(f)=0$.

上述阻碍理论可对相对情形建立，并且可推广到纤维丛的截面的情形．关于后者，读者可参考 Steenrod 的名著［Ste 8；Part III］.

如果所得初次阻碍为零，则进而可定义二次阻碍（secondary obstruction），它是若干个上同调类的一个集合．对于从复形到 n 维球面或$(n-1)$连通空间的二次阻碍分别由 Steenrod［Ste 5］及 J. H. C. Whitehead［WhH］讨论．对于球面丛的二次阻碍由廖山涛［Lia］获得表示公式而解决．稍迟，对于一般纤维丛的二次阻碍由 Boltyanski 在［Bol］中处理．

第十章　微分拓扑学肇始

虽然 Poincaré 从 1895 年的第一篇长文起所论及的空间为欧氏空间中的微分流形，但他所引入的概念，方法和所得结果，基本上适用于单纯复形的范畴，尔后又被用不同方式推广到一般的空间，而形成代数拓扑学．与此同时，有关微分流形的拓扑性质的研究，也在缓慢地作为代数拓扑学的部分内容而发展．其中最重要者有微分流形的三角剖分，Morse 理论，de Rham 定理和 Hodge 定理，以及 Whitney 从 1935 年开始的系统研究．

§10.1　微分流形的实现

微分流形的内蕴概念是由 H. Weyl 于 1913 年在 [Wey 1] 中给出，虽然那里被讨论的仅是 2 维的曲面．现今通常采用的定义说，一个 n 维的 C^r 微分流形 M^n，是一个具有可数基的 Hausdorff 空间，它有一个开覆盖 $\{U_\lambda\}$ 及相应的映射族 $\{\varphi_\lambda\}$，使得 φ_λ 将 U_λ 同胚地映成 $\mathbf{R}^n$ 中的一个开子集，这样的偶对 $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$ 称为区图 (chart)，而族 $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}$ 称为一个图册 (atlas)，满足对于 $U_\lambda \cap U_\mu \neq \varnothing$，映射 $\varphi_\lambda \circ \varphi_\mu^{-1}$ 是从 $\varphi_\mu(U_\lambda \cap U_\mu) \subset \mathbf{R}^n$ 到 $\varphi_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu) \subset \mathbf{R}^n$ 中的 C^r 阶映射．这里 $r \geqslant 1$ 是一个自然数或 ∞，有时取 $r = \omega$ 表示实解析的．M^n 上的两个 C^r 图册如果并在一起仍

成一个 C^r 图册，就说它们 C^r 等价. M^n 上的 C^r 图册的一个 C^r 等价类或极大化称为 M^n 上的一个 C^r 结构. 平常所说，给定了一个 n 维 C^r 微分流形 M^n，是指给定了满足上述定义中的 M^n，并且也给定了 M^n 上的 C^r 结构，若记作 $\mathscr{D}$，也就是说给定了一个偶对（M^n，$\mathscr{D}$）. 不过，在许多场合，C^r 结构 $\mathscr{D}$ 被略去而未写出. 此外，许多人把 C^∞ 称为光滑，我们也采用这个说法.

Poincaré 的 n 维 C^r 流形是定义在某个高维欧氏空间 $\mathbf{R}^N$ 中的一个子流形，换句话说，是作为已经嵌入于欧氏空间中的子流形来定义的. 一个自然的问题是：内蕴定义的 C^r 微分流形是否一定可以在某个欧氏空间中"实现"为子流形，这显然是一个基本问题. Whitney 在 1935 年完成了这一项开创性研究［Why 1, 3, 4］. 他首先明确提出，一个微分流形在欧氏空间里的"实现"有两种，一种后来称为浸入（immersion），他当时称为正则映射（regular map），这是 C^r 映射，满足其切映射在每一点的局部范围内是单射；另一种是嵌入（embedding），这是单的浸入.

Whitney 的第一个定理［Why 3］说，设 M^n 是一个 n 维 C^r 微分流形，$1 \leqslant r \leqslant \infty$. 则存在一个 M^n 到 $\mathbf{R}^{2n}$ 的 C^r 浸入并且存在一个 M^n 到 $\mathbf{R}^{2n+1}$ 的正常（proper）C^r 嵌入. 正常指紧集之原像为紧的. 这个定理证明的主要想法是，假设 M^n 是紧的，则可取一个有限的图册 $(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2), \cdots, (U_h, \varphi_h)$，其中开集族 U_1，U_2，…，U_h 覆盖 M^n，并且每个 φ_j 将 U_j 同胚地映成 $\mathbf{R}^n$ 中的开集. 基于 φ_j 可在 M^n 上定义一个 C^r 映射 ψ_j：$M^n \to \mathbf{R}^{n+1}$，使得 ψ_j 在 U_j 的一个稍小的开集 V_j 上的限制 $\psi_j | V_j = (\varphi_j | V_j, 0)$ 而且 V_1，V_2，…，V_h 覆盖 M^n. 于是 $f = (\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_h)$ 是从 M^n 到 $\mathbf{R}^{h(n+1)}$ 的一个 C^r 嵌入. 然后设法从 $\mathbf{R}^{h(n+1)}$ 投影到 $\mathbf{R}^{2n}$ 或 $\mathbf{R}^{2n+1}$，分别得到 C^r 浸入或 C^r 嵌入. 假设 M^n 不是紧的，M^n 可用相对紧的开子集的上升序列 $\{W_k\}$ 来表示，再用对 k 的归纳法来完成证明.

Whitney 在 [Why 3] 中实际上证得更多. 设 $g: M^n \to \mathbf{R}^N$ 是一个 C^s 映射, $0 \leqslant s \leqslant r$, η 是定义在 M^n 上的一个正值连续函数, 则当 $N \geqslant 2n$ 或 $N \geqslant 2n+1$ 时, 存在一个 C^r 浸入或正常 C^r 嵌入 $f: M^n \to \mathbf{R}^N$, 使得 $f \simeq g$, 而且 f 可逼近 g 到 η 的程度直到 C^s 阶. 因此, 即使 g 是一个常值映射, 做一个小的摄动 (即形变), 便可得一浸入或正常嵌入.

Whitney 的证明非常精彩, 其中提出了现在称为管状邻域的概念, 它与嵌入的流形的法丛可以等同. 同时, 丛的概念也是 Whitney 在 1935 年的另一重大发现. Whitney 的证明中的分片处理的做法后来提炼为 "单位分解" (partition of unity). 读者可参考 [HirM 3] 和 [Mi 6].

§ 10.2 微分流形的实现(续)及 Whitney 绝招

1944 年 Whitney 发表了两篇连在一起的文章, [Why 12] 和 [Why 13], 将 § 10.1 中第一个定理的结论加强而得第二个定理, 因为其证明要困难得多, 而被人称为 "困难的" Whitney 定理, 从而前者被称为 "容易的" Whitney 定理. "困难的" Whitney 定理说: 设 M^n 是一个 C^r 阶的 n 维微分流形, $1 \leqslant r \leqslant \infty$. 则存在 M^n 到 $\mathbf{R}^{2n-1}$ 的 C^r 浸入 [Why 13] 并且存在 M^n 到 $\mathbf{R}^{2n}$ 的正常的 C^r 嵌入 [Why 12].

请注意, 第一个定理中关于经过小摄动后可得浸入的结论可以加强为对 $N \geqslant 2n-1$, 但是关于嵌入的相应结论当 $N = 2n$ 时并不成立, 而只有存在性.

这里, 最重要的流形拓扑的方法论被 Whitney 发现了. 这是在 [Why 12] 中, 为证 M^n 到 $\mathbf{R}^{2n}$ 中存在一个嵌入, 先设 M^n 在 $\mathbf{R}^{2n}$ 中的浸入 f 只有二重自交点且横截地自交, 即两片的切空间

只有一点公共；设 M^n 可定向且已有向，则每个二重自交点可依定向赋予相交指数 +1 或 -1；若只有有限个二重自交点，将对应之数的代数和定义为 f 的自相交数 I_f. 然后，在 $n\geqslant 3$ 的情形，先取一个浸入 f 使得 I_f 为 0. 此时自交点必按指数 +1 及 -1成对出现. Whitney 设计了一个办法，可以将一对指数分别为 +1 及 -1 的二重自交点经过正则同伦而消去. 如此，可将自交点全部消光而得一嵌入.

后来人们认识到这个办法，是微分拓扑理论中最核心的技术，被称为 **Whitney 绝招**（Whitney trick）. 设有向流形 V^m 中的两个有向的连通子流形 P 和 Q 横截地相交，$\dim P+\dim Q=\dim V^m=m$，并且 x，$y\in P\cap Q$ 的相交指数相反. 今在 P 中取曲线 C_1 连接 x 和 y，在 Q 中取曲线 C_2 连接 y 和 x，并且如果存在从二维圆盘 D^2 到 V^m 的微分嵌入 f 使得 $f(\partial D^2)=C_1\cup C_2$，则存在 V^m 的一个局限于 $f(D^2)$ 的某个与其他交点不相交的紧邻域上的同痕（isotopy）将 Q 变成 Q_1，Q_1 与 P 横截地相交并使得 $Q_1\cap P=(P\cap Q)\setminus\{x,y\}$.

值得注意的是，在 $m\geqslant 5$ 时，再加上一定的连通性条件，上述所需的嵌入 V^m 中的圆盘存在，从而 Whitney 绝招可以施行. 在证明当 $n\geqslant 3$，M^n 在 $\mathbf{R}^{2n}$ 中存在嵌入时，取 P，Q 为 M^n 上自相交的两片. 由于 $\mathbf{R}^{2n}$ 有很强的连通性，从而可成功地应用 Whiteny 绝招，于是定理在 $n\geqslant 3$ 时得证. 定理在 $n=1$ 和 2 时，是用另外的方法分别证明的，证法比较初等.

Whitney 绝招在 $m\leqslant 4$ 时的确失效，这一结论 20 世纪 60 年代之初才被确认［Ke-M 2］. 这是低维流形拓扑学的困难所在. 读者可参考 §26.2.

§ 10.3　C^1 流形的三角剖分

自 Poincaré 创造三角剖分技术后的一段时间内，微分流形的三角剖分的存在性和代数簇的三角剖分的存在性是一个有待解决的问题. 直到 1930 年，Lefschetz [Le 8] 和 van der Waerden [W 2] 同时解决了代数簇的三角剖分存在性，Lefschetz 甚至将结果推广到解析簇.

S. S. Cairns 1930 年宣布，C^1 微分流形存在 C^1 三角剖分，并且两个 C^1 三角剖分组合等价 [C 1]，而详细的证明发表在 1934 年的 [C 2] 中，他当时只考虑了某个欧氏空间中的子流形，根据后来的 Whitney 嵌入定理（见 § 10.2），可知这并非是一个限制. 后来 Brouwer [Br 6]，Freudenthal [Freu 2] 和 J. H. C. Whitehead [WhH 4] 都发表了 Cairns 证明的改进. 读者可参考 J. R. Munkres 的书 [Mu 6] 的第二部分，它是按照 J. H. C. Whitehead 的办法写的.

§ 10.4　de Rham 定理与 Hodge 定理

在 § 5.4 中，我们已经介绍过 de Rham 在 1930 年左右的重要工作. 接着从 1932 年起，英国数学家 W. V. D. Hodge 发表了一系列论文，结合 de Rham 定理，建立了著名的 Hodge 定理，并为代数流形和解析流形的同调的研究提供新的强有力的工具，受到高度评价.

任一微分流形都可由实现定理而配备多种黎曼度量. 设 M^n

是一个 n 维光滑流形，$E^k(M^n)$ 表 M^n 上的所有光滑 k 形式所成的线性空间，d：$E^k(M^n)\to E^{k+1}(M^n)$为外微分算子．设 M^n 上已给定一个黎曼度量，它在局部坐标下的表达式为

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_{i,j} g_{ij}(u_1,\cdots,u_n)\mathrm{d}u_i\mathrm{d}u_j\ , \tag{1}$$

Beltrami 曾关于此度量定义了一个微分算子（称为 Beltrami 算子），推广了 $\mathbf{R}^n$ 中的 Laplace 算子而定义了黎曼流形上的调和函数．Hodge 建立了调和外微分形式概念如下．利用 M^n 上的黎曼度量得 M^n 的切丛和余切丛上的度量．从而在 M^n 的外代数丛 $\Lambda^k(T^*(M^n))$亦有内积结构．进而可定义光滑 k 形式上的星号（star）算子

$$*:\ E^p(M^n)\to E^{n-p}(M^n), \tag{2}$$

星号算子 $*$ 满足性质

$$*\circ * = (-1)^{p(n-p)}. \tag{3}$$

定义算子 δ：$E^p(M^n)\to E^{p-1}(M^n)$为

$$\delta = (-1)^{n(p+1)+1} *\circ d\circ * . \tag{4}$$

然后定义 Laplace-Beltrami 算子（简称拉普拉斯算子）Δ 为

$$\Delta = \delta d + d\delta, \tag{5}$$

对每个满足 $0\leqslant p\leqslant n$ 的 p 而言，它是$E^p(M^n)$上的一个线性算子．我们令

$$H^p = \{\omega\in E^p(M^n):\Delta\omega = 0\}, \tag{6}$$

H^p 中形式称为调和 p 形式．

Hodge 定理说：在一个紧的有向黎曼流形 M^n 上，每一个 de Rham 上同调类包含着唯一的一个调和闭形式．这个定理对复值形式也对，此时 de Rham 上同调群是采用 $\mathbf{C}$ 为系数群的 $H^p(M^n;\ \mathbf{C})$．

这个重要定理被 Hodge 写进 1941 出版的书［Ho］中．但该书在证明基本定理时有错误，在 1952 年的再版中才被纠正．

关于 de Rham 定理和 Hodge 定理，读者可以参考［War］.

§ 10.5 Morse 理论

为处理大范围变分学问题，美国数学家 M. Morse 于 1920 年代建立起一套系统的理论，用拓扑学的方法来解决变分学问题. 如今人们统称这套理论为 Morse 理论. Morse 的贡献主要在于，在临界点与拓扑不变量之间建立了联系. 由于受到当时语言的限制，因此 Morse 1934 年的名著 [Mor 3] 很难阅读. 后来 Seifert 和 Threlfall 于 1938 年出版了 [Se-T 2]，来介绍 Morse 的工作，被公认为是一本优秀的著作. 到了 50 年代，Morse 理论被 Bott，Smale 和 Milnor 等人发展和运用，获得新的辉煌成就，这时出现了 Milnor 的讲义 [Mi 14]，对 Morse 理论的基础做了精彩的陈述，并且对于基础理论的两项重要应用，测地线和周期性定理，做了严格而简明的介绍. 这本书现在已成为公认的 Morse 理论入门的经典著作. 接着 Milnor 还出版了 [Mi 16]，介绍了 Smale 做出的 Morse 理论的另一重要应用：h 协边定理，5 维以上广义 Poincaré 猜测的解决即为其推论.

这里我们简介 Morse 理论的基础部分. 设 M^n 是一个光滑的 n 维流形，f 是定义在 M^n 上的一个实值 C^∞ 函数. 一点 $p\in M^n$ 称为 f 的一个临界点 (critical point)，如果导射 df: $T_pM^n\to T_{f(p)}\mathbf{R}$ 是零映射，换句话说，在点 p 的邻域 U 的局部坐标系 $(x_1, \cdots, x_n)$ 之下 $\frac{\partial f}{\partial x_1}(p)=\cdots=\frac{\partial f}{\partial x_n}(p)=0$. 实数 $f(p)$ 称为 f 的一个临界值. 临界点 p 称为非退化的，当且仅当 Hessian 矩阵 $H(f)(p)=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(p)\right)$ 是非奇异的. 非退化性不依赖于点 p 附近局部坐标系的选取. $H(f)(p)$ 在 T_pM^n 上决定一个对称双线性

形式，其负定子空间的最大维数称为 f 在点 p 的指数（index），它不依赖于点 p 附近局部坐标系的选取．非退化临界点必是孤立点．函数 f 称为一个 Morse 函数，如果 f 只有非退化临界点，M^n 上的任一光滑实函数 g 可用 Morse 函数任意地逼近．设 M^n 是一个紧的流形，f 是 M^n 上的一个 Morse 函数，则 f 只有有限个临界点．对于满足 $0\leqslant j\leqslant n$ 的 j，用 C_j 表示临界点中指数为 j 的个数，R_j 表 M^n 的第 j 个模 2 Betti 数，则有下列著名的 Morse 不等式

$$C_\lambda - C_{\lambda-1} + \cdots + (-1)^\lambda C_0 \geqslant R_\lambda - R_{\lambda-1} + \cdots + (-1)^\lambda R_0, \quad (7)$$

外加一个等式

$$C_n - C_{n-1} + \cdots + (-1)^n C_0 = R_n - R_{n-1} + \cdots + (-1)^n R_0. \quad (8)$$

应当指出，上述重要结果最初起源于 1885 年 Poincaré 得到的常微分方程界定的曲面上向量场奇点指数和的公式．其后 G. D. Birkhoff 在 1917 年［Bir 2］得到上述不等式的特款 $C_1 - C_0 \geqslant R_1 - R_0$．Morse 不等式正是此不等式的推广．

建议读者参阅［Mi 14］，［Se-T 2］以及［Mi 16］．

第十一章　纤维丛理论

纤维丛理论，包括广义的纤维空间理论的建立是代数拓扑学和微分拓扑学发展中最重要和最精彩的事件.

纤维丛最自然的模型是微分流形的切丛. 但最早是 Seifert 运用“纤维”和“纤维空间”来分解一个三维流形为简单的对象. 接着 Whitney 建立了纤维丛概念，这是一个结构精细而复杂的概念，Ehresmann 等人引入主丛概念，并由 Hurewicz 和 Steenrod 等人参加，而完成了分类理论.

纤维丛理论中核心部分是示性类理论，我们将在下一章专述.

§ 11.1　切　丛

早在 Poincaré 1880 年研究常微分方程整体性质时，便出现向量场概念. 他不仅考虑了欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中开集中的向量场，而且进而考虑在某个 $\mathbf{R}^N$ 中嵌入的一个 n 维微分流形上的向量场. 这时所论的向量，必须是切于 M^n 的向量. 同时向量场的积分曲线也是包含在 M^n 中的曲线.

值得一提的是，当 M^n 是一个嵌入于某个 $\mathbf{R}^N$ 中的流形时，在 M^n 的一点 p 的切向量概念可用传统的割线上向量之极限的办

法来定义，并且容易被人们理解．但是如果 M^n 是一个内蕴定义的未嵌入某欧氏空间的 n 维 C^1 流形，在 M^n 的一点 p 处切于 M^n 的一个向量应当用内蕴的办法来定义．例如，任取 M^n 上给定的 C^1 结构中的一个区图（U，φ），使得 $p\in U$，且 φ：$U\to\mathbf{R}^n$ 将 U 同胚地映成 $\mathbf{R}^n$ 中开集 $\varphi(U)$，记 $q=\varphi(p)$．我们有理由将 $\mathbf{R}^n$ 中以 q 为端点之曲线在点 q 之切向量"认为"是 M^n 在点 p 之切向量．但先要弄清楚 $\mathbf{R}^n$ 中点 q 的一个切向量是什么？经典的看法是，以点 q 为起点的一个向量是有确定方向和长度的线段．这个说法似乎很直观，其实是含糊的．精确一些，$\mathbf{R}^n$ 中点 q 的一个切向量是一个偶对（q，v），其中第一个就是点 q，第二个 v 是 $\mathbf{R}^n$ 中一个向量．用多元微分学中方向求导的语言表述，$\mathbf{R}^n$ 中点 q 处的一个切向量（q，v），是对应于在点 q 附近有定义的 C^1 函数类 $C^1(\mathbf{R}^n, q; \mathbf{R})$ 上的一个实线性泛函 v，它对于 $f\in C^1(\mathbf{R}^n, q; \mathbf{R})$ 而言，$v(f)$就是函数 f 在点 q 关于向量 v 的方向导数，若（x_1，…，x_n）是 $\mathbf{R}^n$ 中坐标系，且 v 在此坐标系之下为 $v=(a_1, \cdots, a_n)$，则

$$v(f) = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}(f)\bigg|_q . \tag{1}$$

模仿这个做法，我们说 M^n 在点 p 处的一个切向量 v，是在 M^n 上点 p 附近有定义的 C^1 实函数类 $C^1(M^n, p; \mathbf{R})$ 上的一个实线性泛函 v，使得如果（U，φ）是 M^n 的 C^1 结构的一个区图，满足 $p\in U$，则存在 n 个实数（a_1，…，a_n）具有性质，对于每个 $f\in C^1(M^n, p; \mathbf{R})$，有

$$v(f) = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}(f\circ\varphi^{-1})\bigg|_{\varphi(p)} . \tag{2}$$

当然，$(a_1,\cdots,a_n)$这一组数依赖于区图（U，φ）的选取．容易推出，当（V，ψ）是 M^n 的另一区图使 $p\in V$，对应的 n 个实数为（b_1，…，b_n），则有

$$b_j = \sum_{i=1}^{n} a_i J_{ji}(\psi \circ \varphi^{-1}) \Big|_{\varphi(p)}, \quad j = 1, \cdots, n, \tag{3}$$

其中 $J_{ji}(\psi\circ\varphi^{-1})$ 是函数 $\psi\circ\varphi^{-1}$的 Jacobi 矩阵中的表值. 注意, $C^1(M^n, p; \mathbf{R})$除了有一个实线性空间结构外, 关于函数的乘法还有环结构. 设 f, $g \in C^1(M^n, p; \mathbf{R})$, 则有 $fg \in C^1(M^n, p; \mathbf{R})$, 这时有

$$v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g). \tag{4}$$

对切向量的上述定义, 1935 年以前并未被数学家得到. Whitney 在 1936 年著名论文 [Why 1] 中, 粗略地用到上述看法, 但没有写得如上面那样清楚. 这个概念后来有发展. 1946 年, C. Chevalley 在其名著 [Chev] 中指出, 线性性加上条件 (4), 足以刻画切向量. 从而给出了一个与上面等价, 但不用区图的内蕴定义: M^n 在点 p 处的一个切向量 v, 是 C^1 (M^n, p; $\mathbf{R}$) 上的一个满足条件 (4) 的实线性泛函. 至此切向量概念完成.

不管用上面的哪个说法, 容易证明 M^n 在点 p 处的所有切向量构成一个 n 维的线性空间 T_pM^n, 称为 M^n 在点 p 的切空间. 由其定义就知道, 对不同的点 p, 所得切空间是没有公共点的. 取 M^n 每一点 p 的切空间 T_pM^n 的不交并, 它具有一个自然的拓扑, 这就是 M^n 的切丛概念, 记为 TM^n. 如果 M^n 是 C^r 阶的, $r\geqslant 2$, 则 TM^n 还是一个 C^{r-1}阶的 $2n$ 维微分流形.

§ 11.2 纤维丛的定义

第一个用到“纤维”和“纤维空间”这两个词的人可能是 Seifert, 他在 1933 年发表的论文 [Se 2] 中, 用于将一个 3 维流形分解为一些纤维, 每个纤维是一个简单闭曲线, 每个纤维均有

一个邻域同胚于开的实心环．但是，在 Seifert 的做法中，一般说来，存在一些“例外”纤维，对于这种纤维的一个邻域，不存在一个同胚可以将该邻域映成“标准实心环” $\mathring{D}^2\times S^1$，而将其中每个纤维映成“标准实心环”中形如 $\{y\}\times S^1$ 的一条圆周．

恰当的纤维丛（fibre bundle）的概念是由 Whitney 在 1935 年［Why 2］中定义的，他当时称为“球面空间”．并于 1940 年在［Why 10］中更名为“球面丛”，即以球面为纤维的纤维丛．据说 Whitney 曾打算写一本有关纤维丛的专著，但是未能实现，这对我们而言是一个遗憾．

Whitney 的“球面空间” E，是一些子空间 $\{x\}\times S^m$ 的不交并，其中 x 是一个“底空间” B 中的任意点．S^m 的维数 m 是固定的．而“全空间” E 局部地是 B 中一个开子集和球面 S^m 的拓扑乘积．Whitney 在 1935 年的文章［Why 2］中，就假设了 B 有一个开覆盖 $\{U_i\}$，对每个 i 做乘积空间 $U_i\times S^m$，然后用下面的方法把它们互相“粘起来”，对于任意 $x\in U_i\cap U_j\neq\varnothing$，将 $U_i\times S^m$ 中的 $\{x\}\times S^m$ 与 $U_j\times S^m$ 中的 $\{x\}\times S^m$ 等置如下：存在从 $(U_i\cap U_j)\times S^m$ 到自身的一个“转移同胚” φ_{ij}，具有性质

$$\varphi_{ij}:(x,y)\mapsto(x,\xi_{ij}(x,y)),\tag{5}$$

其中 ξ_{ij}：$(U_i\cap U_j)\times S^m\to S^m$ 是连续的，当 B 是一个 C^r 微分流形时，假设 ξ_{ij} 是 C^r 阶的．并且，对于 $x\in U_i\cap U_j$，

$$y\mapsto\xi_{ij}(x,y)\tag{6}$$

是 S^m 到自身的一个同胚．而且容易推知，对于使得 $U_i\cap U_j\cap U_k\neq\varnothing$ 的任意三个指标 i，j，k，“上闭链条件”成立：

$$\varphi_{ik}(x,y)=\varphi_{ij}(x,\varphi_{jk}(x,y)),\tag{7}$$

其中 $(x,y)\in(U_i\cap U_j\cap U_k)\times S^m$．

Whitney 在该文中，还着重研究当同胚（6）是 S^m 的正交变换的情形，他称之为“正则的”球面空间．他并且还说，研究“正则的”球面空间，等价于后来所谓的向量丛．而且，他的第

一批例子就是嵌入于某 $\mathbf{R}^N$ 中的一个 C^2 流形的切丛和法丛. Whitney 在 1940 年的 [Why 10] 中指出, 在 1935 年的定义中的球面 S^m, 可以换成任何一个拓扑空间 F, 并且正交群可换成"典型"纤维 F 的任何自同胚群. Whitney 还指出当 F 是离散空间时, 纤维空间正是 B 的一个复叠空间. 这就基本上获得了纤维丛的完美的定义. 读者可参阅 [Ste 8] 或 [Hus].

§11.3 主丛的引入

在 Whitney 的纤维丛定义中, 典型纤维 F 的自同胚群后来称为结构群 (structural group), 其重要性逐渐被人们所认识. 与此同时, 法国数学家 C. Ehresmann 在研究 E. Cartan 的连络概念, 他希望用纤维空间的概念来统一处理. 他与 Feldbau 合作, 于 1941 年提出一个与 Whitney 的定义稍有不同的纤维丛定义 [Eh-F], 关于它读者可参阅 [Ste 8; §5]. 重要的是, Ehresmann 和 Feldbau 还提出了主丛概念, 它在纤维丛理论中处于中心地位.

在 Whitney 的纤维丛的定义中, 若设典型纤维是一个拓扑群 G, 同时结构群, 即映射 (6) 映入的自同胚群, 也是 G, 其同胚是 G 的左迁移

$$t \mapsto s_{ij}(x)t, \tag{8}$$

"上闭链条件" (7) 成为

$$s_{ik}(x) = s_{ij}(x) \circ s_{jk}(x), \tag{9}$$

这里 $x \in U_i \cap U_j \cap U_k$. Ehresmann 称这种纤维丛为结构群为 G 的主纤维丛或主丛 (principal bundle). 他还注意到, 如果作为结构群的拓扑群 G 有效地作用在典型纤维 F 上, 为 $(s, y) \mapsto s \cdot y$, 则对以 F 为典型纤维, 以 B 为底空间, 以 G 为结构群的

任意纤维丛 E，只要映射（6）可写成

$$y \mapsto \xi_{ij}(x,y) = g_{ij}(x)\cdot y, \tag{10}$$

其中 g_{ij} 为映 $U_i \cap U_j$ 入 G 的连续（或 C^1）映射，则可配上一个以 B 为底空间，以 G 为结构群的主纤维丛，这只需在（8）中取 $s_{ij} = g_{ij}$ 即可.

反之，如果已给一个以 B 为底空间，以 G 为结构群的主纤维丛 P，并且给了一个拓扑空间 F，群在 F 上的作用为 $(s, y) \mapsto s\cdot y$，则映射

$$\varphi_{ij}(x,y) = (x, s_{ij}(x)\cdot y) \tag{11}$$

定义了一个以 B 为底空间,以 F 为典型纤维,以 G 为结构群的纤维丛,Ehresmann 称它为相配于 P 和 G 在 F 上之作用的纤维丛. 作为例子,他发现由 Hopf 定义的映射 $S^3 \to S^2$, $S^7 \to S^4$ 和 $S^{15} \to S^8$,给出了分别以 S^1, S^3 和 S^7 为结构群的主纤维丛[Eh 6].

关于主丛与配丛，请参阅［Ste 8］或［Hus］.

§ 11.4 诱导丛与截面

Whitney 在 1935 年就暗示了诱导（induced）丛的概念，如今亦称为拉回（pullback）. 设给了一个以 B 为底空间，以 F 为典型纤维，以 G 为结构群，以 E 为全空间的纤维丛，从 E 到 B 的自然映射为 π，称为投射. 我们记此纤维丛为 $\xi = (E, \pi, B, F, G)$. 设 B' 是一拓扑空间，g: $B' \to B$ 是连续映射，由 ξ 和 g 可以决定一个以 B' 为底空间，以 F 为典型纤维，以 G 为结构群的纤维丛如下. 作全空间 E' 为 $E \times B'$ 的子空间，它由满足条件 $g(b') = \pi(x)$ 的点 (x, b') 组成，π': $E' \to B'$ 为往第二因子空间的投射，即得一个纤维丛，记作 $g^*(\xi)$，称为 ξ 被 g 诱导的丛或拉回. 并且有一个自然的丛态射 $g^*(\xi) \to \xi$，它在底空间上的映

射即为 $g: B' \to B$.

在 1937 年的一次讲演中，Whitney 还引进了截面（cross-section 或 section）概念，不过遗憾的是，他当时起的名字是“投影（projection）”. 纤维丛的 $\xi = (E, \pi, B, F, \tilde{G})$ 的一个截面是一个连续映射 $s: B \to E$，满足对一切 $b \in B$，$\pi(s(b)) = b$，即 $\pi \circ s = 1_B$. 对于微分流形的切丛而言，一个截面便是整个流形上的一个向量场. 而对于 Whitney 采用过的“球面空间”而言，一个截面便是在整个底空间上处处有定义的连续分布的单位向量场. 有例子说明，这样的向量场不一定存在，如 S^2 上的单位切向量所成的圆周丛. 一般说来，若给定的纤维丛是平凡丛，显然存在截面. 因此截面的不存在性是对纤维丛非平凡性的一种检测. 特别，一个主丛等价于平凡丛的充要条件是存在截面. 若从底空间 B 的某个子空间 A 上的一个截面出发，问题便成了 A 上的一个截面能否延拓为 B 上的截面，由此导致阻碍理论和示性类理论，意义非常重大.

建议读者参考 [Ste 8] 和 [Hus].

§11.5 复叠同伦性质和纤维化

复叠空间是纤维丛的特款，其主要同伦性质是复叠同伦或同伦提升性质，对于纤维丛来说，也有复叠同伦性质，只不过其提升没有唯一性，这也是纤维丛的同伦理论的关键.

在 1935 年，Hurewicz 论同伦群的第一篇文章 [Hur 1] 中，就陈述了下述命题：如果 G 是一个紧 Lie 群，H 是 G 的一个闭子群，$p: G \to G/H$ 是商映射，Y 是一个紧空间且 $f: Y \to G$ 是连续映射. 当 $p \circ f: Y \to G/H$ 同伦于常映射 $Y \to p(H)$，则 f 同伦于一个映射 $g: Y \to H$. 这是纤维丛的复叠同伦性质的特款，

因为在上述给定的条件下，p：$G \to G/H$ 有一个纤维丛构造(参见［Ste 8；§7］)．差不多同时，Borsuk 于 1937 年发表了［Bor 6］，讨论连续函数空间的性质，后来发现其中隐含着复叠同伦性质．

Hurewicz 和 Steenrod 于 1940 年发表了［Hur-St］．在其中，他们对映射 π：$E \to B$ 作了适当假设，使得对 Y 是任何紧空间时复叠同伦性质成立．在这种条件下，当 $b \in B$ 变化时，b 上的"纤维" $\pi^{-1}(b)$一般说来不同胚于一个固定的空间．稍晚一点，在 1941 年 Ehresmann 和 Feldbau 的［Eh-F］及 Eckmann 的［E 1］中，作者们都独立地提出了复叠同伦性质．由于二次世界大战通讯中断，他们都不知道 Hurewicz 和 Steenrod 的论文．

1943 年 Steenrod［Ste 4］证明了，对于 Whitney 的纤维丛(E，π，B，F，G)，当 B 是紧空间时，复叠同伦性质成立．其证明比较简单，因为 B 可用有限个开集覆盖，而纤维丛在这些开集上是平凡的．将此定理推广到 B 是局部紧和仿紧空间时，证明就长且复杂了．Ehresmann 于 1944 年给了一个［Eh 5］，H. Cartan 在 1949—1950 年的讨论班［CH 2］中给了另一个．更弱的条件设 B 是正规和仿紧，是 1955 年 W. Huebsch［Hue］和 Hurewicz［Hur 6］独立给出的．

1950 年，法国数学家 J.-P. Serre 在著名的博士论文［Ser 1］中，突出了复叠同伦性质以后，人们普遍采用这个性质来定义较纤维丛广泛的概念：纤维化(fibration)或纤维空间(fibre space)．连续映射 π：$E \to B$ 称为一个纤维化或纤维空间，如果复叠同伦性质对于每一个拓扑空间 Y 成立．

Serre 在他的论文中为了建立奇异同调的谱序列，只用到更弱的条件，现今人们称之为 Serre 纤维化或弱纤维化(weak fibration)：连续映射 π：$E \to B$ 称为一个 Serre 纤维化，如果复叠同伦性质对于 Y 是一个有限单纯复形(甚至任一方体或单形)成立．这时，即使 B 是道路连通的，只能证明每个纤维$\pi^{-1}(b)$

都具有相同的伦型.

§ 11.6 同伦正合序列

由复叠同伦性质可推导出同伦群正合序列. 历史上第一位发现这个事实的就是给同伦群正式下定义的 Hurewicz, 他在 1935 年的第一篇文章 [Hur 1] 中, 得到有关紧 Lie 群的商空间的复叠同伦性质时, 就证明了这一结果. 设 G 是一个紧连通 Lie 群, H 是 G 的闭子群, p: $G \to G/H$ 是商映射, $e \in G$ 为单元, $\bar{e} = p(H) \in G/H$. 如果 H 不连通, 则由定义可知 $\pi_n(H) = \pi_n(H_0)$, 其中 H_0 是 H 的包含 e 的连通分支. Hurewicz 所得的结果, 用今天通行的说法, 是存在下述正合序列

$$\cdots \to \pi_n(H, e) \xrightarrow{j_\#} \pi_n(G, e)$$
$$\xrightarrow{p_\#} \pi_n(G/H, \bar{e}) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(H, e) \to \cdots$$

在 1940 年 Hurewicz 与 Steenrod 合作的论文 [Hur-St] 中, 对于他们定义的纤维化 (E, p, B) 虽然并未明确提出正合同伦序列, 但他们从复叠同伦性质推导出该序列中最主要一个事实: 设 $F_{b_0} = p^{-1}(b_0)$, 投射 p 诱导了一个同构

$$p_\# : \pi_n(E, F_{b_0}, x_0) \cong \pi_n(B, b_0),$$

其中 $x_0 \in F_{b_0}$. 然后由空间对的正合同伦序列即得纤维化的同伦正合序列

$$\begin{aligned} \cdots \to \pi_n(F_{b_0}, x_0) \xrightarrow{j_\#} \pi_n(E, x_0) \xrightarrow{p_\#} \pi_n(B, b_0) \xrightarrow{\partial} \\ \pi_{n-1}(F_{b_0}, x_0) \to \cdots \to \pi_0(F) \xrightarrow{j_\#} \pi_0(E) \xrightarrow{p_\#} \pi_0(B) \to 0. \end{aligned} \tag{12}$$

根据 § 11.5, 对于所有谈及的复叠同伦性质成立的纤维化,

都应有同伦正合序列（12）．利用（12），可以在许多特殊情形得到 E，B，F 三者的同伦群之间的更精致的关系，特别可得紧 Lie 群的同伦群的许多结果．读者可以参阅［Ste 8］．

§11.7　纤维丛的分类

Whitney 在 1935 年的文章［Why 2］中就已经提出，当给定底空间和给定典型纤维时，对球面丛进行同构分类的问题．在他的 1937 年报告［Why 5］中，他引进了新观念，他考虑“球面 S^μ 中的 ν 大球面空间 $S[\mu,\nu]$”，但并未给出精确定义，并且对 $\nu=1$ 的情形，概述了一个不很清晰的证明：对于任何有限维局部有限单纯复形 B，以 B 为底空间和以 S^ν 为典型纤维的任何球面丛(E,p,B)，均 B 同构（底空间之映射为恒等 1_B）于用一个从 B 到 $S[\mu,\nu]$的底空间的适当连续映射将球面丛 $S[\mu,\nu]$ 的拉回，其中 $\mu=\nu+\dim B$．这是一个很深刻的结论，虽然陈述和证明不够精确．Whitney 心目中的 $S[\mu,\nu]$ 是以 S^ν 为典型纤维，以 Grassmann 流形 $G_{\mu+1,\nu+1}$为底空间的一个球面丛．

Whitney 的上述重要结论经过补充后的陈述和完整证明，是由 Steenrod 于 1943 年［Ste 4］提出的，苏联的 Pontrjagin 也独立得到了同样的结果［Pt 7］．Steenrod 用到一个主纤维丛 $N_\nu^{\mu-\nu}$，它实际上是 Stiefel 流形 $V_{\mu+1,\nu+1}$，虽然他未提到 Stiefel 的名字．它的底空间是 Grassmann 流形 $G_{\mu+1,\nu+1}$．于是，Steenrod 采用的 Whitney 的球面丛 $S[\mu,\nu]$，是相配于以 $V_{\mu+1,\nu+1}$为全空间，以 $G_{\mu+1,\nu+1}$为底空间，以 $O(\nu+1)$ 为结构群自然作用于 S^ν 上的 S^ν 球面丛．对应的结论被称为 Whitney-Steenrod 定理，断言：若 $\mu=\nu+\dim B$，以 B 为底空间且以正交群 $O(\nu+1)$ 为结构群的 S^ν 丛（E，p，B），必 B 同构于从 $S[\mu,\nu]$用

某个连续映射 $B\to G_{\mu+1,\nu+1}$的拉回．而且若 $\mu\geqslant\nu+1+\dim B$，则两个连续映射 g_1，g_2：$B\to G_{\mu+1,\nu+1}$的拉回$g_1^*(S[\mu,\nu])$和$g_2^*(S[\mu,\nu])$是 B 同构的，当且仅当 g_1 与 g_2 是同伦的．

由 Whitney-Steenrod 定理可知，给定 $\mu>\nu\geqslant1$，B 是任意维数$\leqslant\mu-\nu-1$ 的单纯复形，则以 B 为底空间，以 S^ν 为典型纤维，及以$O(\nu+1)$为结构群的球面丛的 B 同构类之集合，一对一地对应于映射的同伦类集合 $[B,\ G_{\mu+1,\nu+1}]$．这个定理证明的关键是，Stiefel 流形 $V_{\mu+1,\nu+1}=O(\mu+1)/O(\nu+1)$当 $\mu>\nu\geqslant1$ 时是 ν 连通的，即道路连通且 π_i（$V_{\mu+1,\nu+1}$）$=0$ 对 $1\leqslant i\leqslant\nu$．因此丛$S[\mu,\nu]$ 称为 S^ν 丛的万有丛（universal bundle），Grassmann 流形 $G_{\mu+1,\nu+1}$称为 S^ν 丛的分类空间（classifying space）．更精确地说，适用于底空间 B 的维数$\leqslant n$ 时的万有丛和分类空间分别称为n 万有丛和 n 分类空间．上法所得 S^ν 的n 万有丛和 n 分类空间，还可适用于底空间 B 是维数$\leqslant n$ 的 CW 复形的情形．然后对 n 取顺向极限，可得对一切维数的 CW 复形适用的万有丛和分类空间．应用主丛概念和相配概念，纤维丛的分类归结为主丛的分类．上面所得分类空间，就是正交群的分类空间．

这个结果立刻可以推广到当结构群 G 是任意紧 Lie 群的情形．因为，根据 Lie 群基本理论，当 k 充分大时，G 必同构于正交群$O(k)$的一个子群，从而 $O(k)$的分类空间可以充当 G 的分类空间．而推广到一般的 Lie 群，则是由陈省身和孙以丰于 1949 年［Che-Su］得到的．

读者可以参阅［Ste 8］．

§11.8　分类空间的 Milnor 构作

设 G 是一个拓扑群，一个以 G 为结构群的主丛$\omega_G=(E_0$，

p_0, B_0) 称为万有丛,若任意 CW 复形底空间 B 上的,以 G 为结构群的主丛的 B 同构类集合,一对一地对应于映射同伦类集合 $[B,B_0]$.此时空间 B_0 称为 G 的分类空间.现在习惯上,G 的分类空间记作 BG 或 B_G,而 G 的万有主丛的全空间记作 EG 或 E_G,从而 $\omega_G=(EG,p_0,BG)$ 或 (E_G,p_0,B_G).

1956 年,Milnor 想出一个聪明的办法 [Mi 3],对任意拓扑群 G 构作出 G 的万有丛和分类空间,而且被分类的主 G 丛 $\xi=(E, p, B)$ 放宽到所谓可计数的(numerable)情形:存在一个序列的连续函数 $u_n: B\to[0,1]$, $n=1,2,3,\cdots$,使得 $U_n=u_n^{-1}((0,1])$ 组成 B 的一个开覆盖并且 ξ 在每个 U_n 上是平凡的.

Milnor 的构作如下.对群 G 作无限联积(infinite join)

$$E_G=G*G*\cdots*G*\cdots, \tag{13}$$

E_G 中一个元素记作 $\langle x, t\rangle$,并写成

$$\langle x,t\rangle=(t_0x_0,t_1x_1,\cdots,t_kx_k,\cdots), \tag{14}$$

其中 $x_i\in G$ 及 $t_i\in[0,1]$,使得只有有限个 $t_i\neq 0$,且 $\Sigma_{0\leqslant i}\ t_i=1$;同时其中 $\langle x, t\rangle=\langle x', t'\rangle$,当对于每个 i 有 $t_i=t_i'$,并且对于使得 $t_i=t_i'>0$ 的 i,有 $x_i=x_i'$.可定义 G 右作用于 E_G 为 $\langle x, t\rangle y=\langle xy, t\rangle=(t_0x_0y, t_1x_1y, \cdots)$,对 $y\in G$.为了在 E_G 上定义拓扑,采用 E_G 上的两族函数:对任意 $i\geqslant 0$, t_i: $E_G\to[0,1]$ 为对于 $(t_0x_0, t_1x_1, \cdots)$ 取值为 t_i; $x_i: t_i^{-1}(0,1]\to G$ 为对于 $(t_0x_0, t_1x_1, \cdots)$ 取值为 $x_i\in G$. E_G 中赋以使得每个 t_i 和每个 x_i 都连续的最小拓扑.从而 E_G 是一个 G 空间,记其商空间为 B_G,商映射为 p,则 $\omega_G=(E_G, p, B_G)$ 称为 Milnor 构作.基本结论是:ω_G 是一个可计数的以 G 为结构群的主丛.对任意可计数的以 B 为底空间,以 G 为结构群的主丛 ξ,存在一个连续映射 f: $B\to B_G$ 使得 $f^*\omega_G$ 和 ξ 是 B 同构的.并且若另有一连续映射 g: $B\to B_G$ 使得 $g^*\omega_G$ 和 ξ 是 B 同构的,则 f 与 g 同伦.即对于可计数的以 G 为结构群的主丛而言,ω_G 是万有丛,B_G

是分类空间.

读者可参阅 [Hus].

§ 11.9 Gysin 序列和王宪钟序列

现在介绍有关特殊纤维化的同调群的两个重要序列,第一个是由 Hopf 的学生 Gysin 于 1941 年得到的[Gy],第二个是由王宪钟于 1949 年提出的[Wan 2].这里用到的同调群为奇异同调.

设 (E, p, B) 是一个纤维化,其中 B 是道路连通的,设 $b_0\in B$ 且 $F=p^{-1}(b_0)$ 道路连通并具有与 n 维球面 S^n 相同的整系数同调群,$n\geqslant 1$. 设对一切 q 而言,$\pi_1(B, b_0)$ 在 $H_q(F)$ 上作用平凡. 则有正合序列

$$\cdots\rightarrow H_{q+1}(B)\rightarrow H_{q-n}(B)\rightarrow H_q(E)\xrightarrow{p_*}H_q(B)\rightarrow\cdots, \qquad (15)$$

它被称为 Gysin 序列.

设 $n\geqslant 2$, (E, p, S^n) 是一个纤维化,其中 E 是道路连通的. 设 $b_0\in S^n$, $F=p^{-1}(b_0)$. 则有正合序列

$$\cdots\rightarrow H_{q-n+1}(F)\rightarrow H_q(F)\rightarrow H_q(E)\rightarrow H_{q-n}(F)\rightarrow\cdots, \qquad (16)$$

它被称为王宪钟序列.

第十二章　示性类理论

自从纤维丛概念建立，有关纤维丛的同调性质的研究便集中在示性类理论．随着时间的推移，示性类理论在现代数学的许多重大领域显示出有深刻应用．主要创始人有，Stiefel，Whitney，Pontrjagin 和陈省身．

示性类起源于向量场的奇点（零点）的存在性的研究，这是 Poincaré 于 19 世纪开创的常微分方程定性论的核心问题，也是大范围分析的肇始．随着 20 世纪初拓扑学的发展，Brouwer 将 Poincaré 的结果推广到高维球面上的连续向量场，后来又被 Hopf 推广到任意紧 n 维流形．

示性类中重要的有 Stiefel-Whitney 类，Pontrjagin 类和陈省身类，前两种是对应于正交群的，而陈类是对应于酉群的．对示性类理论作出重要贡献者，除创始人外，还有吴文俊，R. Thom，F. Hirzebruch 等人．

§ 12.1　向量场的奇点

Poincaré 科学贡献中的重大成就之一，是常微分方程的定性理论．1881 年 [P 11]，他对 S^2 上的 C^1 向量场 v 的孤立奇点（零点），定义了奇点的指数，然后证明了著名的结论，奇点指数

之和等于 2.

1909 年，Brouwer 只假设 S^2 上向量场是连续的，他企图证明至少有一个奇点. 他用反证法推理，用到了向量场的轨线的详细研究 [Br 7].

接着，在 1911 年关于映射度的文章 [Br 2] 中，Brouwer 讨论了对任意 n 而言，S^n 上最多只有有限个奇点的连续向量场的情形，证明了奇点指数之和当 n 是偶数时是 2，而当 n 是奇数时是 0. 其证明用到他自己定义的映射度概念，推理过程很复杂并且很难懂. 他利用 S^n 的一个对称于赤道平面的三角剖分 T，并假设奇点都包含于 T 的 n 维单形的内部. 然后利用测地投影将上半球面上每个 T 中 n 维单形 $s_{1\alpha}$ 映到切于北极的超平面 H_1 上，由 H_1 上的向量场给出投影后的单形的边界到 S^{n-1} 的映射，取其映射度为 $c_{1\alpha}$. 对下半球面也同样做，得映射度 $c_{2\alpha}$. Brouwer 证明，$\Sigma_\alpha(c_{1\alpha}+c_{2\alpha})$ 可化为赤道 S^{n-1} 到自身的两个映射的映射度之和. 接着他断言，此和可化为 S^{n-1} 上一个常值向量的情形，然而他关于这个结果的描述太简略且太令人难懂，而很难使人认为这的确是一个证明. 不过，我们现在有包括下面 Hopf 的普遍结论在内的清楚而严格的证明. 读者可以在微分拓扑的教材，如 [Gu-P] 或 [HirM 3] 中找到.

Hopf 在 1925 年 [Hop 15] 宣布，Brouwer 关于 S^n 上向量场的结果可以推广到任何紧的 C^1 流形 M^n 上：设 v 是 M^n 上的一个只有有限个奇点的连续向量场，则它们的指数之和等于 M^n 的 Euler-Poincaré 示性数 $\chi(M^n)$.

值得提出的是，对于一个组合流形而言，由于或者可能不存在微分结构，或者微分结构不唯一，切向量场的定义有不确定性. 但 Hopf 1928 年 [Hop 2] 对组合流形考虑依赖于三角剖分的向量场，证明了上述结论依然成立.

§ 12.2 Stiefel 类

E. Stiefel 是 Hopf 的学生，他在 1935 年完成的博士论文 [Sti] 受到 Hopf 的启发推广了 § 12.1 中 Hopf 关于向量场的研究. 设给了一个光滑的 n 维流形 M^n，对于 $m \leqslant n$，M^n 上是否存在 m 个切向量场 v_j，使得在每一点 $x \in M^n$，这 m 个切向量 $v_j(x)$ 是线性无关的？若 $m=n$ 时这样的向量场存在，这时 M^n 的切丛是平凡的，我们通常称 M^n 是可平行化的 (parallelizable). 这种情形在微分几何中特别重要.

为此，Stiefel 首先定义了现在通称为 Stiefel 流形的 $V_{n,m}$ 和 $V_{n,m}^0$，$V_{n,m} \subset (\mathbf{R}^n)^m$ 由 $\mathbf{R}^n$ 中 m 个线性无关的向量的组，称为 m 标架，所组成，$V_{n,m}^0$ 由 $\mathbf{R}^n$ 中标准正交的 m 标架所组成. 显然 $V_{n,m}^0 \subset V_{n,m}$，而且包含映射是一个同伦等价. 因为用 Gram-Schmidt 标准正交化方法，可证 $V_{n,m}^0$ 是 $V_{n,m}$ 的一个强形变收缩核. Stiefel 详细研究了 $V_{n,m}^0$ 的拓扑性质，证明了下述结论，用同伦群来写，$\pi_i(V_{n,m}^0)=0$，当 $i<n-m$；$\pi_{n-m}(V_{n,m}^0) \cong \mathbf{Z}$，当 $m=1$ 或 $n-m$ 为偶；$\pi_{n-m}(V_{n,m}^0) \cong \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$，当 $m \neq 1$ 且 $n-m$ 为奇. 因此，Stiefel 得到两个命题. 第一命题说，$r+1$ 维球体 B^{r+1} 的边缘 S^r 上的 $\mathbf{R}^n$ 中的一个连续的 m 标架场，当 $r<n-m$ 时必可延拓到 B^{r+1} 上；而当 $r=n-m$ 时，可延拓的充分必要条件是 S^{n-m} 上的 m 标架场所决定的同伦类 $\alpha \in \pi_{n-m}(V_{n,m}^0)$ 是 0. 第二命题说，B^{n-m-1} 上的两个 m 标架场若在 S^{n-m-2} 上的限制是同伦的，则它们本身也是同伦的.

然后，Stiefel 取 M^n 的一个三角剖分 T，使得 T 的每个单形被包含在一个区图的区域内. 由第一命题，便知在 T 的 $n-m$

维骨架 T^{n-m} 上总可定义由 M^n 的切向量组成的连续 m 标架场.

当时上同调概念虽然刚刚建立，但可能 Stiefel 尚不知道，所以他并未直接采用上链和上同调，而是采用 T 的对偶胞腔重分中的对偶胞腔组成的链．我们现在用上链和上同调来将 Stiefel 做的表述如下．对应于 T^{n-m} 上的连续 m 标架场 $X^{(m)}$，有一个 $(n-m+1)$ 维上链

$$\gamma^{(m)} \in C^{n-m+1}(T;\pi_{n-m}(V_{n,m})), \tag{1}$$

其中，对于 T 之任意 $n-m+1$ 维有向单形 σ，$\gamma^{(m)}(\sigma) \in \pi_{n-m}(V_{n,m})$ 之值正是 $X^{(m)}$ 在 σ 的边缘上的限制所决定的同伦类.接着可证 $\gamma^{(m)}$ 是一个上闭链.再由第二命题可以推出，T^{n-m} 上另一个连续 m 标架场 $X'^{(m)}$ 对应的上闭链 $\gamma'^{(m)}$ 与 $\gamma^{(m)}$ 之差是一个上边缘，从而 T^{n-m} 上的所有连续 m 标架场决定了唯一的一个 $n-m+1$ 维上同调类，利用 Poincaré 对偶定理，便得 Stiefel 定义的 $m-1$ 维同调类 $F^{m-1} \in H_{m-1}(M^n;\pi_{n-m}(V_{n,m}))$.

Stiefel 运用他所得的示性类，证明了任一紧的可定向的光滑的 3 维流形总是可平行化的.

§ 12.3　Whitney 类

Whitney 在 1935 年的论文［Why 2］中，讨论了任意以局部有限单纯复形 B 为底空间的球面丛 $\xi=(E, p, B)$，采用了非常类似的办法，独立地得到示性类的定义．他只用到 Stiefel 流形的整系数同调群，没加证明而陈述了 $H_{n-m}(V^0_{n,m}) \cong \mathbf{Z}$ 当 $m=1$ 或 $n-m$ 为偶，$H_{n-m}(V^0_{n,m}) \cong \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ 当 $m \neq 1$ 且 $n-m$ 为奇．接着他简略地证明了，若将 B 重分得足够细，则对于 $r \leqslant m$，在 r 维骨架 B^r 上从低维往上归纳地可定义一个连续映射 φ：B^r

$\to V^0_{n,m-r+1}$. φ 在 B 的任意 r 维单形 σ 的边界上的限制，定义了一个奇异同调类 $\lambda(\sigma,\varphi)\in H_{r-1}(V^0_{n,m-r+1})$. 于是对每个 $r\leqslant inf(n,m)$, 得一同态

$$\tilde{w}_r: H_r(B)\to H_{r-1}(V^0_{n,m-r+1}), \tag{2}$$

并且只与球丛 $\xi=(E,p,B)$ 的同构类有关.

Whitney 在 1937 年的讲演 [Why 5] 中，采用了新定义的上同调语言来表述 $\tilde{w}_r$. 在 1940 [Why 10], 他陈述了 $\tilde{w}_r$ 的自然性，对于连续映射 g: $B'\to B$, 若 $\xi'=g^*\xi$ 是 ξ 的拉回，则

$$\tilde{w}_r(\xi')=g^*(\tilde{w}_r(\xi)). \tag{3}$$

在此公式中上同调群的系数群 G 是 $\mathbf{Z}$ 或 $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. 实际上，Whitney 在 1935 年的文章中，已经考虑到由自然同态 $G\to\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ 诱导的同态 $H^r(B; G)\to H^r(B; \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$, 得到 $\tilde{w}_r$ 的像 $w_r\in H^r(B; \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$. 如此便得现今所称的 Stiefel-Whitney 示性类，记作 $w_r(\xi)$, $r=1, 2, \cdots, n$.

Stiefel 和 Whitney 的方法可归结为一般的阻碍理论. 现在设 $\xi=(E, p, B)$ 是一个秩为 n（即纤维之维数为 n）的向量丛，对任意 $k\leqslant n$, 记与 ξ 相配的以 $V^0_{n,k}$ 为典型纤维的丛为 $V_k(\xi)$. B 上的一个 k 标架场就是 B 作为 $V_k(\xi)$ 的底空间上的一个截面. 因为 $V^0_{n,k}$ 是 $n-k-1$ 连通的，所以在 B 的 $n-k$ 维骨架 B^{n-k} 上可定义 $V_k(\xi)$ 之截面. 欲将此截面延拓到高一维的骨架 B^{n-k+1} 上，则得阻碍上闭链，其上同调类称为阻碍类 (obstruction class)

$$o_{n-k+1}(\xi)\in H^{n-k+1}(B;\{G_x\}), \tag{4}$$

其中 $\{G_x\}$ 为由 $\{\pi_{n-k}(V^0_{n,k}(x))\}_{x\in B}$ 组成的局部系数. 若将 $\pi_{n-k}(V^0_{n,k}(x))$ 利用自然映射映成 $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, 则得常系数的上同调类，即 Stiefel-Whitney 类

$$w_{n-k+1}(\xi)\in H^{n-k+1}(B;\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}). \tag{5}$$

在 Whitney 1940 年的论文 [Why 10, 11] 中，最重要结果是乘积定理. 用现在的记号来写，设 $\xi_1=(E_1, p_1, B)$ 和 $\xi_2=(E_2,$

p_2, B）是同一底空间 B 上的两个向量丛，先作笛卡尔积 $\xi_1 \times \xi_2 = (E_1 \times E_2, p_1 \times p_2, B \times B)$，它是一个以 $B \times B$ 为底的向量丛，其秩等于 ξ_1 的秩加 ξ_2 的秩．令 $d: B \to B \times B$ 为对角映射，由 d 所诱导的丛（拉回）称为 ξ_1 与 ξ_2 的 Whitney 和

$$\xi_1 \oplus \xi_2 = d^*(\xi_1 \times \xi_2), \tag{6}$$

它是以 B 为底空间，每点 $x \in B$ 上的纤维是 ξ_1 和 ξ_2 中对应纤维之直和．**乘积定理说**：

$$w_k(\xi_1 \oplus \xi_2) = \sum_{i=0}^{k} w_i(\xi_1) \cup w_{k-i}(\xi_2). \tag{7}$$

他说证明很难，而只给出少许描述，即使在［Why 11］中，也只是对秩为 1 的 ξ_1 和 ξ_2 给了证明．所以，一般认为 Whitney 始终未将自己的证明写出来．这个重要的定理的证明，首先是由吴文俊［Wu 1］和陈省身［Che 2］发表在 Ann. of Math. 的同一卷中．这个定理后来被推广到其他各种示性类，并被选取为 Stiefel-Whitney 示性类的公理系中的一条公理．

Stiefel-Whitney 类有许多重要应用．$w_1(\xi)=0$ 指示 ξ 是可定向的向量丛．应用于流形的浸入理论，例如可知 $\mathbf{R}P^8$ 不能浸入 $\mathbf{R}^{14}$ 中等．应用于代数学，解决了可除代数（division algebra）的存在性问题．在实向量空间 $\mathbf{R}^n$ 上建立可除代数曾被认为是最重要的数学问题之一，如复数域 $\mathbf{C}$ 和四元数域 $\mathbf{H}$ 的建立．更高维的有 Cayley 的八元数体，它是一个非结合的代数．Stiefel［Sti］证明，若 $\mathbf{R}^n$ 上存在一个双线性乘法运算（不必结合）而无零因子，则 $\mathbf{R}P^{n-1}$ 可平行化，故 $w(\mathbf{R}P^{n-1})=1$．从而必须有 $n=2^r$．已知 $\mathbf{R}P^0$，$\mathbf{R}P^1$，$\mathbf{R}P^3$ 和 $\mathbf{R}P^7$ 可平行化，因为在 $\mathbf{R}^1$，$\mathbf{R}^2$，$\mathbf{R}^4$ 和 $\mathbf{R}^8$ 上分别存在可除代数 $\mathbf{R}$，$\mathbf{C}$，$\mathbf{H}$ 和 Cayley 的八元数．二十世纪五十年代末，在［Bot-M］，［Ke 1］和［Ad 1］中证明了，其余的 $\mathbf{R}P^k$ 均不可平行化，由此可知除 $n=1$，2，4 和 8 外，$\mathbf{R}^n$ 上不存在可除代数，从而结束了代数学上的一个历史难题．

建议读者参阅［Ste 8］，［Mi-S］或［Hus］.

§ 12.4 Pontrjagin 类和 Euler 类

Whitney 在纤维丛理论中完成了向量丛（他用球面丛）的分类，所得万有丛的全空间是某个 Stiefel 流形，分类空间是对应的 Grassmann 流形，但他却并未想到将示性类定义为 Grassmann 流形以 $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ 为系数群的上同调类拉回之像. 这个精采的观念是 13 岁便双目失明的卓越的苏联数学家 Pontrjagin 的众多重大贡献中的又一项. 他于 1942 年发表了［Pt 7］，几年后又在［Pt 9］中进一步发展. 他只研究可定向的 C^1 流形 M 和它的切丛$T(M)$，并设 M 已嵌入某个 $\mathbf{R}^n$ 中. 他考虑由 $\mathbf{R}^n$ 中有向的 m 维子向量空间所成的 Grassmann 流形 $\tilde{G}_{n,m}$. 运用 Schubert 簇，他得到 $\tilde{G}_{n,m}$的胞腔剖分. 吴文俊后来简化了这个做法［Wu 8］.

他们对 Schubert 记号稍做修改，设

$$\omega:\{1,2,\cdots,m\}\to\{0,1,\cdots,n\}, \tag{8}$$

满足

$$0\leqslant\omega(1)\leqslant\omega(2)\leqslant\cdots\leqslant\omega(m)\leqslant n, \tag{9}$$

对每个 ω 配以由 $\mathbf{R}^{m+n}$中典则基中的

$$e_{\omega(1)+1},e_{\omega(2)+2},\cdots,e_{\omega(m)+m}$$

为有序基所决定的有向 m 维子空间 X_ω. 令由有向子空间 $V\in\tilde{G}_{m+n,m}$组成集合为 U_ω^+（或 U_ω^-），若使得其到 X_ω 上的典则投射是保向（或反向）双射且

$$\dim(V\cap\mathbf{R}^{\omega(i)+i})\geqslant i,\text{对 }1\leqslant i\leqslant m.$$

U_ω^+ 和 U_ω^- 都同胚于 $d(\omega)=\sum\limits_{i=1}^{m}\omega(i)$ 维欧氏空间 $\mathbf{R}^{d(\omega)}$ 中的一个开球体，它们形成 $\tilde{G}_{m+n,m}$的一个胞腔剖分.

Pontrjagin 确定了这个胞腔复形的边缘算子，以计算 $\widetilde{G}_{m+n,m}$的同调群，而吴文俊则将同调换成上同调以简化 Pontrjagin的结果. $H^i(\widetilde{G}_{m+n,m};\mathbf{Z})$是一个自由 $\mathbf{Z}$ 模和一个 $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ 上的向量空间的直和. Pontrjagin 选取适当的符号 ± 而令

$$R_\omega = U_\omega^+ \pm U_\omega^-. \tag{10}$$

吴文俊仔细研究了对偶胞腔剖分，而从形如（10）的链得到以下的上链.

（a）若 ω 满足$\omega(j)=0$，当 $1\leqslant j\leqslant m-k$；$\omega(j)=1$，当 $m-k+1\leqslant j\leqslant m$，此时 $d(\omega)=k$. 所得上链记作 ω_k^m，都是 $Z^k(\widetilde{G}_{m+n,m};\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$中上闭链，甚至 ω_m^m 是$Z^m(\widetilde{G}_{m+n,m};\mathbf{Z})$中上闭链.

（b）若 ω 满足$\omega(j)=0$，当 $1\leqslant j\leqslant m-2k$；$\omega(j)=2$，当 $m-2k+1\leqslant j\leqslant m$，此时 $d(\omega)=4k$. 所得上链记作 $\omega_{2k,2k}^m$，对一切 $k\leqslant m/2$，是 Z^{4k}（$\widetilde{G}_{m+n,m}$; $\mathbf{Z}$）中上闭链.

ω_k^m 在$H^k(\widetilde{G}_{m+n,m};\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$中的上同调类是以 $\widetilde{G}_{m+n,m}$为底空间的有序 m 标架丛的 Stiefel-Whitney 类.

对于 $k\leqslant m/2$，$\omega_{2k,2k}^m$在$H^{4k}(\widetilde{G}_{m+n,m};\mathbf{Z})$中的上同调类记作 p_k，而 ω_m^m 在 $H^m(\widetilde{G}_{m+n,m}$; $\mathbf{Z}$）中的上同调类记作 $e=e_m$，分别称为球面丛$\widetilde{S}[m+n-1,m-1]$的 Pontrjagin 类和 Euler 类，其中球面丛$\widetilde{S}[m+n-1,m-1]$是用自然映射 $\widetilde{G}_{m+n,m}\to G_{m+n,m}$ 将 Whitney 的球面丛$S[m+n-1,m-1]$的拉回，且两者之间有关系

$$e_m \cup e_m = p_{m'} \quad 若\ m=2m'. \tag{11}$$

若 ρ：$\widetilde{G}_{m+n,m}\to\widetilde{G}_{m+n,m}$是改变定向所得之对合，则有

$$\rho^*(p_k)=p_k,\ \rho^*(e_m)=-e_m. \tag{12}$$

对于任意有向的向量丛$\xi=(E,\ p,\ B)$，由分类定理可知，它可由某连续映射 g：$B\to\widetilde{G}_{m+n,m}$诱导. 于是，上同调类

$$p_k(\xi)=g^*(p_k)\in H^{4k}(B;\mathbf{Z}), \tag{13}$$

对 $k \leqslant m/2$，

$$e(\xi)=g^*(e) \in H^m(B;\mathbf{Z}) \tag{14}$$

分别称为 ξ 的第 k 个 Pontrjagin 类和 Euler 类．若 ξ 的秩 m 是奇的，则$2e(\xi)=0$.若 ξ 的秩 m 为偶的，$m=2m'$，则

$$p_{m'}(\xi)=e(\xi) \cup e(\xi). \tag{15}$$

若 $\bar{p}_k$ 和 $\bar{e}$ 是 p_k 和 e 的模 2 约化，则有

$$\bar{p}_k(\xi)=w_{2k}(\xi) \cup w_{2k}(\xi), \tag{16}$$

$$\bar{e}(\xi)=w_m(\xi). \tag{17}$$

§12.5 陈省身类

陈省身于 1945 年将 Pontrjagin 的想法推广到复向量丛，此时取复 Stiefel 流形 $V_{n,m}(\mathbf{C})$和复 Grassmann 流形 $G_{n,m}(\mathbf{C})$，对应的分类定理，Whitney-Steenrod 定理仍然成立，相当于结构群取为酉群 $U(m)$.

陈省身［Che 1］开始只考虑复流形的切丛，并采用上同调．吴文俊在［Wu 8］中将陈的结果推广到任意以单纯复形为底空间的任意复向量丛上．陈省身和吴文俊都运用了 Ehresmann 利用 Schubert 簇所做的$G_{m+n,m}(\mathbf{C})$的胞腔剖分．用吴文俊的记号，§12.4 中的向量空间 $X_\omega \subset \mathbf{R}^{m+n}$换成其复化 $Z_\omega \subset \mathbf{C}^{m+n}$，$U_\omega^+$ 和 U_ω 换成 $\mathbf{C}^{m+n}$中其到 Z_ω 上的典则投射为双射的 m 维复向量子空间组成的集合 W_ω．其 Schubert 簇是闭包 $\overline{W}_\omega$，胞腔 W_ω 的维数为 $2d(\omega)$．他然后引进特殊函数 ω，使得

$$\omega(j)=0, \text{当 } 1 \leqslant j \leqslant m-1;\ \omega(m)=k.$$

他记作 $\bar{\omega}_k^m$，于是$2d(\bar{\omega}_k^m)=2k$.对应的上链是 $Z^{2k}(G_{m+n,m}(\mathbf{C});\mathbf{Z})$中上闭链，并且 $\bar{\omega}_k^m$ 对应的上同调类 $c_k \in H^{2k}(G_{m+n,m}(\mathbf{C});\mathbf{Z})$称为万有复向量丛的陈类．由此，利用拉回的作法，可得任意复向

量丛 ξ 的陈类 $c_k(\xi)$.

吴文俊还建立了陈类的乘积定理

$$c_k(\xi_1 \oplus \xi_2) = \sum_{i=0}^{k} c_i(\xi_1) \cup c_{k-i}(\xi_2). \tag{18}$$

他还证明了 Pontrjagin 类可由陈类表示为

$$p_j(\xi) = (-1)^j c_{2j}(\xi \otimes \mathbf{C}). \tag{19}$$

§ 12.6 进一步的重要结果

(A) 设 ξ 是一个秩为 n 的实向量丛, $w_r(\xi)$对 $1 \leqslant r \leqslant n$ 已定义,再令 $w_0(\xi) = 1 \in H^0(B;\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$, $w_r(\xi) = 0 \in H^r(B;\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$,对 $r > n$. 记 $w(\xi) = 1 + w_1(\xi) + \cdots + w_n(\xi)$,称为全 Stiefel-Whitney 类. 并记形式级数 $w(\xi, t) = \sum_i w_i(\xi) t^i$. 于是乘积定理可写成

$$w(\xi_1 \oplus \xi_2) = w(\xi_1) \cup w(\xi_2) \tag{20}$$

或

$$w(\xi_1 \oplus \xi_2, t) = w(\xi_1, t) \cup w(\xi_2, t). \tag{21}$$

设 ξ 是一个有向的秩为 n 的实向量丛, $p_r(\xi)$对 $1 \leqslant r \leqslant n/2$ 已定义,令 $p_0(\xi) = 1$ 及 $p_r(\xi) = 0$,当 $r > n/2$. 全 Pontrjagin 类定义为 $p(\xi) = 1 + p_1(\xi) + \cdots + p_{[n/2]}(\xi)$. 并记 $p(\xi, t) = \sum_r p_r(\xi) t^r$. 于是乘积定理可写成

$$2(p(\xi_1 \oplus \xi_2) - p(\xi_1) \cup p(\xi_2)) = 0 \tag{22}$$

或

$$2p(\xi_1 \oplus \xi_2, t) = 2p(\xi_1, t) \cup p(\xi_2, t). \tag{23}$$

设 ξ 是秩为 n 的复向量丛, $c_r(\xi)$对 $1 \leqslant r \leqslant n$ 已定义,令 $c_0(\xi) = 1$ 及 $c_r(\xi) = 0$,对 $r > n$. 全陈类定义为 $c(\xi) = 1 + c_1(\xi)$

$+\cdots+c_n(\xi)$. 用 $c(\xi,t)$表形式级数$\sum_r c_r(\xi)t^r$. 于是乘积定理可写成

$$c(\xi_1\oplus\xi_2)=c(\xi_1)\cup c(\xi_2) \tag{24}$$

或

$$c(\xi_1\oplus\xi_2,t)=c(\xi_1,t)\cup c(\xi_2,t). \tag{25}$$

(B) 吴文俊在 1950 年 [Wu 6], 运用不久前由 Steenrod 定义的上同调类的平方运算 $Sq=Sq^0+Sq^1+Sq^2+\cdots$, 证明了对紧微分流形 M 恰存在一个上同调类 $v\in H^*(M;\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$, $v=1+v_1+\cdots+v_n$, $v_k\in H^k(M;\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$, 使得对任意上同调类 $x\in H^*(M;\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$, 有

$$v\cup x=Sqx$$

或

$$\langle v\cup x,[M]\rangle=\langle Sqx,[M]\rangle. \tag{26}$$

上同调类 v 称为全吴类. 利用吴类和平方运算, 可得 Stiefel-Whitney 类的重要结果, 称为吴公式

$$w(M)=Sq(v) \text{ 或 } w_k(M)=\sum_{i+j=k}Sq^i(v_j). \tag{27}$$

同时, 吴文俊 [Wu 7] 证明了 Stiefel-Whitney 类之间存在一个关系式

$$Sq^k(w_m)=w_kw_m+\binom{k-m}{1}w_{k-1}w_{m+1}+\cdots+\binom{k-m}{k}w_0w_{m+k}, \tag{28}$$

其中$\binom{p}{q}$为二项式系数. 这个式子在文献中亦被称为吴公式, 我们称它为吴关系式. 它的重要性在于, A. Dold 于 1956 年 [Do 1] 证明, Stiefel-Whitney 类之间除吴关系外别无其他.

(C) F. Hirzebruch 在 1956 年 [Hz 3] 中提出示性类的公理系统.

Stiefel-Whitney 类的公理系统是:

公理 1 对每个在可允许的空间 B 上的秩为 n 的实向量丛 ξ 和每个整数 $i \geqslant 0$ 存在一个 Stiefel - Whitney 类 $w_i(\xi) \in H^i(B;\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$，其中 $w_0(\xi)=1$ 且 $w_i(\xi)=0$ 当 $i>n$ 时. $w(\xi)$ 表 $\sum_i w_i(\xi)$.

公理 2 （自然性） $w(f^*\xi)=f^*w(\xi)$.

公理 3 （Whitney 乘积定理） $w(\xi \oplus \eta)=w(\xi) \cup w(\eta)$.

公理 4 （正则化）设 η_n 是 $\mathbf{R}P^n$ 上的典则线丛，则 $w(\eta_n)=1+h_n$，其中 h_n 是 $H^1(\mathbf{R}P^n;\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ 中非零元素.

陈类的公理系统是：

公理 1 对每个在可允许的空间 B 上的秩为 n 的复向量丛 ξ 和每个整数 $i \geqslant 0$，存在一个陈类 $c_i(\xi) \in H^{2i}(B;\mathbf{Z})$，其中 $c_0(\xi)=1$，且 $c_i(\xi)=0$，当 $i>n$ 时. $c(\xi)$ 表 $\sum_i c_i(\xi)$.

公理 2 （自然性） $c(f^*\xi)=f^*c(\xi)$.

公理 3 （Whitney 乘积定理） $c(\xi \oplus \eta)=c(\xi) \cup c(\eta)$.

公理 4 （正则化）设 η_n 是 $\mathbf{C}P^n$ 上的典则复线丛，则 $c(\eta_n)=1+h_n$，其中 h_n 是 H^2 （$\mathbf{C}P^n$；$\mathbf{Z}$）中的生成元.

[Hz 3] 中的两个公理 3，均按分裂为线丛（见（D））的方式表述.

(D) Hirzebruch 在 [Hz 3] 中采用分裂方法（splitting method）来表述 Whitney 乘积定理，其要点如下.

设 $\xi=(E,p,B)$ 是一个秩为 n 的复向量丛，其相配的以 $U(n)$ 为结构群的主丛记为 $P(\xi)=(P,q,B,U(n))$. 在 $U(n)$ 中取其最大环面 T^n，作商空间 $X=P\times_{U(n)}(U(n)/T^n)$，商映射记作 $r:P\to X$，得到一个以 X 为底空间，以 T^n 为结构群的主丛 $\tilde{\xi}=(P,r,X,T^n)$. 而从 X 到 B 有一个自然投射 $\rho:X\to B$，使得 (X,ρ,B) 是一个以 $U(n)/T^n$ 为典型纤维，以 $U(n)$ 为结构群，$U(n)$ 在 $U(n)/T^n$ 上之作用为左迁移的丛，它与 $P(\xi)$ 相配，故与 ξ 相配. 由图表

$$
\begin{array}{ccc}
P & \xrightarrow{r} & X \\
& {\scriptstyle q}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle \rho} & \\
& B &
\end{array}
\tag{29}
$$

用 ρ 将 ξ 拉回得 $\rho^*(\xi)$，它是以 X 为底空间以 $U(n)$ 为结构群的一个秩为 n 的复向量丛．但 $\rho^*(\xi)$ 相配于主丛 $\tilde{\xi}$，从而作为复向量丛可分裂为复线丛之 Whitney 和

$$\rho^*(\xi)=\lambda_1\oplus\lambda_2\oplus\cdots\oplus\lambda_n. \tag{30}$$

再由 A. Borel 关于以紧 Lie 群为结构群的主纤维丛的上同调的工作 [Bor 2]，知诱导同态

$$\rho^*:H^{\cdot}(B;\mathbf{Z})\to H^{\cdot}(X;\mathbf{Z}) \tag{31}$$

是一个单射．由此可知，在上同调代数 $H^{\cdot}(X;\mathbf{Z})$ 中，陈类有公式

$$c(\rho^*(\xi);t)=\prod_{i=1}^{n}c(\lambda_i;t). \tag{32}$$

如今的说法是，若有一个映射 ρ 将某可允许空间 X 映入 B，使得 (30) 成立且 (31) 为单射，则说映射 ρ 是一个分裂映射（splitting map）.

然后，设在同一底空间 B 上给了两个复向量丛 ξ，η，其秩分别为 m，n．由上面结果可知，存在映射 ρ：$X\to B$ 将 ξ 和 η 同时分裂，得

$$\rho^*(\xi)=\lambda_1\oplus\cdots\oplus\lambda_m,\ \rho^*(\eta)=\mu_1\oplus\cdots\oplus\mu_n, \tag{33}$$

其中 λ_i 和 μ_j 均为 X 上的复线丛．于是

$$\rho^*(\xi\oplus\eta)=\lambda_1\oplus\cdots\oplus\lambda_m\oplus\mu_1\oplus\cdots\oplus\mu_n, \tag{34}$$

从而

$$
\begin{aligned}
c(\rho^*(\xi\oplus\eta),t)&=\prod_i c(\lambda_i,t)\cup\prod_j c(\mu_j,t)\\
&=c(\rho^*(\xi),t)\cup c(\rho^*(\eta),t).
\end{aligned}
\tag{35}
$$

利用 ρ^* 之单射性，知公式(25)成立．

用同样办法还可得

$$\rho^*(\xi \otimes \eta) = \bigoplus_{i,j} \lambda_i \otimes \mu_j, \tag{36}$$

$$\rho^*(\overset{r}{\wedge} \xi') = \bigoplus_{i_1 < i_2 < \cdots < i_r} (\lambda'_{i_1} \otimes \lambda'_{i_2} \otimes \cdots \otimes \lambda'_{i_r}) \tag{37}$$

并且若 ξ，η 是两个复线从，

$$c_1(\xi \otimes \eta) = c_1(\xi) + c_1(\eta). \tag{38}$$

对 Stiefel-Whitney 类也有对应的结果.

(E) 设 λ_1，λ_2，…，λ_p 是同一底空间 B 上的复线丛. 则它们的 Whitney 和 $\lambda_1 \oplus \lambda_2 \oplus \cdots \oplus \lambda_p$ 的特征标（character）定义为

$$\exp(c_1(\lambda_1)) + \exp(c_1(\lambda_2)) + \cdots + \exp(c_1(\lambda_p)) \in H^*(B; \mathbf{Q}).$$

由 Hirzebruch 的分裂法，可对任意复向量丛 ξ 定义它的特征标 $\mathrm{ch}(\xi) \in H^*(B; \mathbf{Q})$，并且有

$$\mathrm{ch}(\xi \oplus \eta) = \mathrm{ch}(\xi) + \mathrm{ch}(\eta), \tag{39}$$

$$\mathrm{ch}(\xi \otimes \eta) = \mathrm{ch}(\xi) \cup \mathrm{ch}(\eta), \tag{40}$$

实际上，吴文俊早先就对秩为 n 的实向量丛 ξ 的 Stiefel-Whitney 类，采用"幻影的（phantom）"不定元 t_1，…，t_n 的初等对称多项式表示

$$\begin{aligned} w_1 &= t_1 + t_2 + \cdots + t_n, \\ w_2 &= t_1 t_2 + \cdots + t_{n-1} t_n, \\ &\cdots \\ w_n &= t_1 t_2 \cdots t_n. \end{aligned} \tag{41}$$

对 Pontrjagin 类和陈类也可类似地做，此时采用整系数. 对陈类而言，t_j 可解释为利用分裂法后的陈类 $c_1(\lambda_j)$. 例如，对称多项式

$$s_k = t_1^k + \cdots + t_n^k \tag{42}$$

可视为用陈类 $c_j(\xi)$ 表出的多项式 $s_k(c(\xi))$. 用这个记号，则陈特征标可写成

$$\mathrm{ch}(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} s_k(c(\xi)). \tag{43}$$

(F) Pontrjagin 在 1944 年于 [Pt 8] 中证明，对任一有向的

光滑紧流形 M^n，其 Euler-Poincaré 示性数有公式

$$\langle e(TM^n),[M^n]\rangle = \chi(M^n), \tag{44}$$

其中$[M^n]$为 M^n 的由定向决定的基本同调类，$\chi(M^n)$为 M^n 的 Euler-Poincaré 示性数，$e(TM^n)$为 TM^n 的 Euler 类．这正是 Euler 类这一名称的由来．Pontrjagin 采用了 de Rham 上同调，将 Euler 类用 Riemann-Christoffel 张量明显地用闭微分形式来计算．

（G）Gysin 的上同调序列可陈述如下．设$\xi=(E,p,B)$是一个有向的秩为 n 的实向量丛，E_0 表 E 中非零向量所成子空间，$p_0=p|E_0$．设$e\in H^n(B;\mathbf{Z})$是 ξ 的 Euler 类，则有下列正合序列，称为 Gysin 序列：

$$\cdots\longrightarrow H^i(B;\mathbf{Z})\xrightarrow{\cup e}H^{i+n}(B;\mathbf{Z})\xrightarrow{p_0^*}$$

$$H^{i+n}(E_0;\mathbf{Z})\longrightarrow H^{i+1}(B;\mathbf{Z})\xrightarrow{\cup e}\cdots \tag{45}$$

（H）微分流形的 Stiefel-Whitney 类，可以不借助微分结构而用 Steenrod 运算来定义，从而是拓扑不变量，这是 R. Thom 1952 年在［Th 2］中得到的．而 Pontrjagin 类的拓扑不变性是一个困扰人的难题．吴文俊在［Wu 9］中证明了 p_k(mod 3)和 p_k(mod 4)是拓扑不变的．但是 Milnor 在 1962 年［Mi 11］中指出 Pontrjagin 类不是拓扑不变的．后来苏联数学家 S. P. Novikov 于 1964 年［Nov 3］中证明，有理系数 Pontrjagin 类是拓扑不变的．吴文俊猜测(见[Hz 3])，4 维有向微分流形 M^4 的号差(signature)$\sigma(M^4)$与 Pontrjagin 类$p_1=p_1(TM^4)$之间有关系

$$\sigma(M^4)=\frac{1}{3}p_1[M^4]. \tag{46}$$

后来由 Thom［Th 3］和 V. A. Rohlin［Ro 4］证明．这启发了 Hirzebruch 的重要的发现，所谓号差定理［Hz 2，3］．

第十三章　束　论

束论是法国数学家 J. Leray 的重要创造之一，H. Cartan 和 A. Grothendieck 等也有贡献. 关于它的发明和发展有一段复杂的历史. 但在此，先要说明束这一词的中文译名的故事. Leray 在定义束时采用的法文名词为 faisceau（复数为 faisceaux），翻译成英文为 sheaf（复数为 sheaves）. 50 年代吴文俊先生在中国科学院数学研究所讲授这个理论时正式将法文 faisceau 及英文 sheaf 翻译成“束”，已被数学界所公认并采用. 后来不幸被误译成“层”，使人莫名其妙，希望今后能正其名.

§ 13.1　Leray 的介入

Leray 于 1934 年曾因与 Schauder 合作，将 Brouwer 的映射度概念和不动点定理推广到无限维情形 [Ler-S]，而与代数拓扑有关联. Leray 需要应用这个定理于泛函空间，以获得流体动力学中的非线性偏微分方程解的存在性. 二战期间，Leray 从 1940 年至 1945 年间是位于奥地利的一座战俘集中营（Oflag XVII）中的俘虏. 他在战俘营里组织了一所大学，而且亲自讲授了代数拓扑学. 这门课的讲义颇有新意，战后于 1945 年发表 [Ler 2]，其中包含着束论的萌芽. 接着，Leray 于 1946 年的两篇短文

[Ler 3, 4] 中，第一次正式引进束，束的上同调和谱序列等重要概念.

可以毫不夸张地说，这不仅是代数拓扑学发展的里程碑，也是 20 世纪现代数学发展的最重大的历史事件之一. 因为，这些概念不仅是代数拓扑学的强有力的观念和工具，而且迅速扩展到多复变，代数几何，偏微分方程和微局部分析，甚至数论以及数理逻辑等看似与拓扑相去甚远的数学学科. 这想必是 Leray 始料不及的.

Leray 的短文发表后，他接着从 1947 年起，在法兰西学院 (Collège de France) 系统讲授了有关内容，1950 年发表为 [Ler 10, 11]. 这在巴黎的数学界引起了关注，特别 H. Cartan 和他那个时期的几位学生（如 J.-L. Koszul 和 J.-P. Serre 等）都介入其中. 这些课题成了 1947 至 1951 年间人们经常讨论的事情. 后来还有 F. Hirzebruch [Hz 3], R. Godement [Go] 和 A. Grothendieck [Gro] 的贡献.

下面几节给出一个简介.

§13.2 Leray 1945 年讲义中的顶盖

Leray 1945 年发表的集中营中的讲义 [Ler 2] 表明了他对同调论的创造性看法. 他不满意 1940 年以前的同调论的方法，既不满意三角剖分，也不满意顺向和逆向极限. 他将上同调建立在新的基础上，不用剖分，不用局部定向性和局部线性性，不用单纯逼近，不用奇异链复形，也不用覆盖. 他打算将上链复形公理化以定义上同调，他定义了顶盖（法文 couverture）概念. 为了定义顶盖，他先定义"抽象复形"为一序列的有限秩的自由交换群，对每个维数 p，有一组基 $\{X^{p\alpha}\}_\alpha$，带有一个上边缘运算

$X^{p\alpha}\mapsto X^{p\alpha}$，后者是 $p+1$ 维群中的元素，满足上边缘的上边缘是零这条公理．他称复形是“具体的”，若对每个 $X^{p\alpha}$ 对应了空间 E 的一个非空子集 $|X^{p\alpha}|$ 作为支集，满足公理：若 $X^{q\beta}$ 是附着于 $X^{p\alpha}$ 的，即它们之间可插入有限个基元素，使得每个是位于前一个的上边缘之中，则 $|X^{q\beta}|\subset|X^{p\alpha}|$．一个具体复形 K 称为 E 上的一个顶盖，如果其支集是闭的；对 E 的任意点 x 其支集包含 x 的那些元素组成的子复形是简单的，即其上同调是平凡的；并且所有 0 维基元素之和是一个上闭链（单位上闭链）．空间 E 的系数取自环 A 的上同调类，是 E 上任意顶盖 K 的 p 维基元的以 A 中元素为系数的线性组合的上同调类．

这是 Leray 第一次提出的顶盖定义．

§13.3 Leray 1950 年讲义中的顶盖和束

Leray 1950 年发表的讲义［Ler 10，11］是 1947—1948 和 1949—1950 之间在法兰西学院讲演的内容．前者包括束，顶盖，上同调和谱序列等概念，极为丰富．后者主要介绍在纤维空间的应用．

本章余下的篇幅，着重从［Ler 10］的顶盖和束及其上同调等概念出发，介绍束论的发展，而将谱序列放到下一章中介绍．

Leray 在这里给出了束的定义如下．设 E 是局部紧的 Hausdorff 空间，E 上的一个束 $\mathscr{B}$ 是对 E 的任意闭集 F 指定一个环 $\mathscr{B}(F)$，并且对于 E 的闭集间的包含关系 $F_1\subset F$，有一个称为截面（我们改称为限制）的同态 $\mathscr{B}(F)\to\mathscr{B}(F_1)$，将 $\mathscr{B}(F)$ 中元素 b 映为 F_1b，满足条件：$\mathscr{B}(\varnothing)=0$ 和限制的传递性，即若 $F_2\subset F_1\subset F$，则 $F_2(F_1b)=F_2b$．

然后，Leray 重新定义了顶盖，其中采纳了 H. Cartan 在

[CH 2] 中的建议，复形和顶盖不必有基，并且应当有乘法. 设拓扑空间 E 是局部紧的 Hausdorff 的，空间 E 上的一个复形 K 是一个以 δ 为上边缘运算的微分环 K，并具有一个法则，每个元素 $k\in K$ 对应 E 中一个闭集 $S(k)$，称为 k 的支集，满足：$S(0)=\varnothing$；若 $S(k)=\varnothing$ 则 $k=0$；$S(k-k_1)\subset S(k)\cup S(k_1)$；$S(kk_1)\subset S(k)\cap S(k_1)$；$S(\delta k)\subset S(k)$；$S(-k)=S(k)$. 若给了 E 上的一个复形 K，对于 E 中任意闭集 F，记 FK 为 F 上的复形，它是 K 关于由所有支集与 F 不相交的元素组成的理想之商. 于是得一个束 $\mathscr{B}$: $F\mapsto FK$，称为相配于复形 K 的束. E 上的一个复形 K 称为 E 上的一个顶盖，如果它是无挠的，分次的且次数 $\geqslant 0$，上边缘运算 δ 的次数为 1，而且有一个以 E 为支集的单位元 u，并且对于任意 $x\in E$ 而言 xK 的上同调是 xu 的上同调类的整数倍. E 上的一个顶盖 K 称为是精细的 (fine)，如果对于 E 的一点紧化 $E\cup\infty$ 的任意有限开覆盖 $\{V_\nu\}$，有恒等同态 $K\to K$ 的一个分解 $\{\lambda_\nu\}$，即每个 λ_ν 都是 K 到自身的一个同态，且 $\sum_\nu \lambda_\nu=1_K$，使得每个 λ_ν 满足 $S(\lambda_\nu k)\subset S(k)\cap\overline{V}_\nu$，对任何 $k\in K$ 和任何 ν 成立. 对于有限维的局部紧的 Hausdorff 空间而言，精细顶盖是存在的，例如 Čech 的做法或 Alexander 的做法 [Al 14].

Leray 心中的精细顶盖是理想化的"链复形"，而束则是系数群或环的推广，包括常系数和局部系数作为其特例. 若给了 E 上的一个精细顶盖 K 和一个束 $\mathscr{B}$，则可将两者结合起来，以体现系数取自束 $\mathscr{B}$ 而得空间 E 的系数取自 $\mathscr{B}$ 的上同调. 这种将一个顶盖（或复形）K 与一个束 $\mathscr{B}$ 结合起来的办法，Leray 称为交积 (intersection) $K\circ\mathscr{B}$，定义如下：先作张量积 $K\otimes\mathscr{B}$，它由所有形如 $k\otimes b$ 的元素生成，其中 $k\in K$ 而 $b\in\mathscr{B}(F)$，使得 $S(k)\subset F$. $K\otimes\mathscr{B}$ 中元素 $\Sigma k_\mu\otimes b_\mu$ 的支集是所有满足 $\Sigma xk_\mu\otimes xb_\mu\neq 0$ 的点 x 组成的集合. 然后，$K\otimes\mathscr{B}$ 关于所有支集是空集的元素组成的理想之商环，称为 K 和 $\mathscr{B}$ 的交积 $K\circ\mathscr{B}$，它仍是一个顶盖

(或复形)，若 K 是精细的，则 $K\circ\mathscr{B}$ 亦为精细的.

尚需对束附加一些要求. 关系式

$$\lim_{V\to F}\mathscr{B}(V)=\mathscr{B}(F)\left[\text{或}\lim_{V\to F\cup\infty}\mathscr{B}(V)=\mathscr{B}(F)\right] \tag{1}$$

表示，任给了 $b_F\in\mathscr{B}(F)$，必存在 F[或 $F\cup\infty$]的一个闭的邻域 V 以及一个元素 $b_V\in\mathscr{B}(V)$，使得 $b_F=Fb_V$；并且若给了 F[或 $F\cup\infty$]的一个闭邻域 V 及一个元素 $b_V\in\mathscr{B}(V)$使得 $Fb_V=0$，则存在 F[或 $F\cup\infty$]的闭邻域 $V_1\subset V$，使得 $V_1b_V=0$. 关系式

$$\lim_{V\to\infty}\mathscr{B}(V)=0 \tag{2}$$

表示，任给了∞的一个闭邻域 V 及$b_V\in\mathscr{B}(V)$，则存在∞的一个闭邻域 $V_1\subset V$，使得 $V_1b_V=0$. 容易看出(1)，(2)中三式的左边均可理解为顺向极限. E 上的束 $\mathscr{B}$ 称为是正常的 (proper)，如果满足下列三个条件：

a. $\lim\limits_{V\to\infty}\mathscr{B}(V)=0$；

b. 当 F 是E 中非紧的闭子集时，$\lim\limits_{V\to F\cup\infty}\mathscr{B}(V)=\mathscr{B}(F)$；

c. 当 F 是E 中紧的闭子集时，$\lim\limits_{V\to F}\mathscr{B}(V)=\mathscr{B}(F)$.

这些条件既刻画了束的连续性，又刻画了紧支性. 若 $\mathscr{B}$ 是 E 上正常束，K 是E 上一个顶盖，则 $K\circ\mathscr{B}$ 是具有紧支的，即它的每个元素的支集都是紧的.

于是 Leray 得到下面重要的唯一性定理：给定 E 上的正常束 $\mathscr{B}$，则 $K\circ\mathscr{B}$ 的上同调$H^*(K\circ\mathscr{B})$与精细顶盖 K 的选取无关，于是我们记它为 $H^*(E;\mathscr{B})$，称之为空间 E 关于束 $\mathscr{B}$ 的上同调环. 这个上同调环是紧支的，与已有的上同调理论比较，当 $\mathscr{B}$ 取为常系数整数环时，这就是 Alexander-Spanier 紧支上同调 [Al 14][Sp 1]，而在微分流形的情形，当 $\mathscr{B}$ 取为常系数实数域时，正是紧支 de Rham 上同调.

Leray 此处的证明，动用了他自己创建的谱序列这一重武器的. 后来有人得到简化的直接证明 [F]. 对于闭支的情形，上同调的唯一性也可以在局部紧且仿紧的空间范畴上建立的，这时

束 $\mathscr{B}$ 的条件要作相应的改变.

以后的发展显现出顶盖这个概念逐渐被人们遗忘，是否应当，尚不得而知，而束的概念进一步在变化发展.

§13.4 H. Cartan 讨论班 1948—1951 和 Hirzebruch 书中的束论

1947 年在巴黎由法国国立科研中心（Centre National de la Recherche Scientifique）支持出版了一本代数拓扑学论文集（Colloque de Topologie Algébrique），其中 Leray 提供了一篇论文 [Ler 7]，同时 H. Cartan 也为同一论题提供了自己的一篇论文，但当该会议论文集即将于 1949 年出版之前，H. Cartan 关于束论的概念改变了，他于是将自己的论文撤掉了. H. Cartan 在他主持的讨论班 1948—1949 中，有一半内容是讨论束论的，后来也未再版. 接着，Leray1950 年的长文 [Ler 10] 发表. 随后，H. Cartan 讨论班 1950—1951 中发展了束论的新观念，而 A. Borel 于 1951 年完成了有关 Leray 理论的综合讲义 [Bor 1].

在 H. Cartan1950—1951 讨论班中，由 M. Lazard 建议 Cartan 采纳如下的束的定义. 设 X 和 $\mathscr{F}$ 是拓扑空间，p: $\mathscr{F}\to X$ 是一个局部同胚的连续的满射，即每点 $z\in\mathscr{F}$ 都有一个开邻域 $V\subset\mathscr{F}$ 使得限制 $p|V: V\to X$ 是一个将 V 映成 X 中的开集 $p(V)$ 上的同胚，对于点 $x\in X$，原像 $p^{-1}(x)$ 称为 x 上的那一根茎(stalk)，如果每根茎都有一个群（或环或模等）结构，且涉及的运算为连续的，则称（$\mathscr{F}$, p, X）或 $\mathscr{F}$ 是一个群（或环或模等）束.

这个 Cartan-Lazard 意义下的束的定义，被 Hirzebruch 采纳写进他 1955 年写作的书 [Hz 3] 中作为束（德文 Garbe）的定义，同时将 Leray 意义下的束经过改造，将其中闭集改成开集后，被采纳为 Garbendatum，意为“束之资料”. 在这本书 1966

年的英文版中，Garbe 被译为 sheaf，而 Garbendatum 被译成 presheaf. 现在，后者依英文之意译成预束. 确切的定义如下：

拓扑空间 X 上的一个预束$\{S_U, r_U^V\}$由以下要素组成：对任意开集 $U \subset X$ 有一个群 S_U，并且对任意两个开集 $U \subset V \subset X$ 有一个同态 $r_U^V: S_V \to S_U$，满足：

（I）若 U 是空集，则 $S_U = 0$ 是零群；

（II）同态 r_U^U 是恒等；若 $U \subset V \subset W$，则 $r_U^W = r_U^V \circ r_V^W$.

X 上的每个预束决定一个束如下. 设$\{S_U, r_U^V\}$是给定的预束. 对于每点 $x \in X$，令 $S_x = \varinjlim_{U \to x} S_U$ 为在包含 x 的开集族上关于 r_U^V 的顺向极限，它自然是一个群. 每个元素 $f \in S_U$ 决定一个元素 $f_x \in S_x$，f_x 称为 f 在点 x 的芽(germ)，S_x 的每个元素都是芽. 取 $\mathscr{S}$ 是不交并 $\bigsqcup_{x \in X} S_x$，及 $q: \mathscr{S} \to X$ 为对 $f_x \in S_x$，$q(f_x) = x$. 赋 S 以拓扑，使 q 为局部同胚，则$(\mathscr{S}, q, X)$是一个束，S_x 是点 x 上的茎. 这个束称为由预束$\{S_U, r_U^V\}$构作之束.

反之，设$(\mathscr{F}, p, X)$是给定的群束. 设 U 是 X 中开集. 一个连续映射 s：$U \to \mathscr{F}$ 称为 U 上的一个截面，若 $p \circ s = 1_U$. 用 $\Gamma(U, \mathscr{F})$记 U 上所有的截面组成的集合，按茎中群运算自然成为一个群. 于是，对应 $U \mapsto \Gamma(U, \mathscr{F})$及限制 t_U^V 组成一个预束. 这个预束称为束 $\mathscr{F}$ 的典则预束.

从一个预束到由它构作的束的典则预束的自然同态，一般说来既不是单射，也不是满射. 但从一个束到由其典则预束构作的束的自然同态，则是恒等映射.

以上就是由流传极广的重要文献 Hirzebruch 的［Hz 3］所传播的束论概念.

§ 13.5　Godement 书中的 Grothendieck 的束论

A. Grothendieck 在 1957 年发表了重要文章 [Gro]，体现了同调代数与它在束的上同调论中的应用的特点，其中为束重新给出了定义. 接着 R. Godement 按 Grothendieck 的定义写成一本书 [Go]，使得这个定义广为流传. 现介绍如下.

当 Leray 在 1945 年集中营讲义中发明顶盖时，就是想提出一个办法，如何从空间的一个适当的覆盖的每一个成员的上同调，来计算整个空间的上同调. 这类结果可以想成一种"从局部性质向整体性质的过渡". 这类问题在数学中极其重要，并且已经有若干著名的例子. Poincaré 曾于 1883 年证明，一个两个复变量的函数若在 $\mathbf{C}^2$ 的每一点(x_0, y_0)的充分小的邻域中可表为两个全纯函数之商，则实际上在全空间 $\mathbf{C}^2$ 中可表作两个全纯函数之商. 1895 年，法国数学家 P. Cousin 对 $\mathbf{C}^n$ 的某些开集推广了这个定理，提出"从局部到整体"的著名的 Cousin 问题. H. Cartan 于 1945 年曾得到"从局部到整体"的典型定理 [CH 1]：对于维数$\leqslant n$ 的局部紧空间中的开子集 U 的同调$\mathscr{F}(U) = H_n(U; \mathbf{T})$，这里 $\mathbf{T} = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$，具有性质：

F1. 若 U 是开子集 U_i 的并，且 s', s''是 $\mathscr{F}(U)$中两个元素，在每个 U_i 中有相同的限制，则 $s' = s''$.

F2. 若 U 是开子集 U_i 的并，且 $s_i \in \mathscr{F}(U_i)$满足：对每一对使得 $U_i \cap U_j \neq \varnothing$的指标$(i, j)$，$s_i$ 和 s_j 在 $\mathscr{F}(U_i \cap U_j)$中有相同的限制，则存在一个 $s \in \mathscr{F}(U)$在每个 U_i 的限制为 s_i.

因此，自然会想到对 Leray 的束的定义加以修改，除将 Leray的束的定义中闭集换成开集外，再将上述 F1，F2 两条件加进去，而得新的束的定义，这就是 Grothendieck 重新定义而被

Godement 的书采用的概念. 现在正式陈述如下.

拓扑空间 X 上的一个值取自范畴 $\mathscr{C}$ 的一个预束 $\mathscr{F}$ 由以下要素组成: 对任意开集 $U\subset X$, 有一个对象 $\mathscr{F}(U)\in\mathscr{C}$, 且对任意两个开集 $U\subset V\subset X$, 有一个 $\mathscr{C}$ 中态射, 称为限制

$$\rho_U^V:\mathscr{F}(V)\to\mathscr{F}(U), \tag{3}$$

满足两条公理: 对任意开集 U, ρ_U^U 是恒等; 对任意开集 $U\subset V\subset W$, 有关系

$$\rho_U^W=\rho_U^V\circ\rho_V^W. \tag{4}$$

拓扑空间 X 上的一个预束, 如果它还满足 F1 和 F2, 则称为 X 上的一个束.

注记. 这里的预束定义与 Hirzebruch 书上的预束定义 (见 §13.4) 的差别是只少公理 (I). 但它若还满足 F1, 则 $\mathscr{F}(\varnothing)$中元素唯一,于是公理(I)满足.

设给了拓扑空间 X 上的一个预束 $\mathscr{F}$, 仍可用 §13.4 中做法构作出一个 Cartan-Lazard 意义下的束$(E(\mathscr{F}),p,X)$, Godement 的书中称为相配于预束 $\mathscr{F}$ 的平展空间 (espace étalé). 再作此平展空间的截面预束 $\bar{\mathscr{F}}$, 其中对任意开集 U, $\bar{\mathscr{F}}(U)=\Gamma(U,E(\mathscr{F}))$,显然它满足公理 F1 和 F2, 故是一个束. 若 $\mathscr{F}$ 是一个束, 则自然同态 $\mathscr{F}\to\bar{\mathscr{F}}$ 是一个同构, 从而任意束 $\mathscr{F}$ 可以看成一个截面束, $\mathscr{F}(U)$中元素亦称为 U 上的截面. 由此可见, 束和其相配的平展空间互相一意地决定.

换句话说, Hirzebruch 书中的 Cartan-Lazard 意义下束的概念与 Godement 书中的 Grothendieck 意义下束的概念是"等价的". 但是, 现在一个陈述上的困难是, 这两种讲法在世界上均已广泛流传, 我们下面的介绍则双方兼顾. 读者在文献中遇到有关术语时, 请您小心识别, 便不难弄清是哪一种讲法.

§ 13.6 束的上同调（Hirzebruch 讲法）

除 Hirzebruch 的书［Hz 3］的德文版和英文版外，读者还可参考 F. W. Warner 的广为流传的教材［War］. 现在采用 § 13.4 中的术语.

设 X 是一个拓扑空间，A 是一个给定的环. 取 X 上的常值束 $\mathscr{A}=X\times A$，可以证明，存在 X 上的无挠的 A 模束的正合序列

$$0\to\mathscr{A}\to\mathscr{C}_0\to\mathscr{C}_1\to\mathscr{C}_2\to\cdots \tag{5}$$

称为束 $\mathscr{A}$ 的一个无挠分解（resolution），并可设（5）中的束均为精细的（fine），即对 X 的每个局部有限的开覆盖，存在从属的单位分解. 对于 X 上的任意 A 模束 $\mathscr{F}$，对应了一个上链复形

$$0\to\Gamma(\mathscr{C}_0\otimes\mathscr{F})\to\Gamma(\mathscr{C}_1\otimes\mathscr{F})\to\Gamma(\mathscr{C}_2\otimes\mathscr{F})\to\cdots \tag{6}$$

简记作 $\Gamma(\mathscr{C}^*\otimes\mathscr{F})$. 其第 q 个上同调模称为 X 的系数在 A 模束 $\mathscr{F}$ 中的第 q 个上同调模，记作 $H^q(X;\mathscr{F})=H^q(\Gamma(\mathscr{C}^*\otimes\mathscr{F}))$.

对于 X 上 A 模束之间的任意同态 f: $\mathscr{F}\to\mathscr{F}'$，诱导了上同调模之间的同态 f^* : $H^q(X;\mathscr{F})\to H^q(X;\mathscr{F}')$.

X 上的 A 模束之短正合序列

$$0\to\mathscr{F}'\to\mathscr{F}\to\mathscr{F}''\to 0 \tag{7}$$

决定了同态 $H^q(X;\mathscr{F}'')\to H^{q+1}(X;\mathscr{F}')$，而得上同调模的长正合序列

$$\begin{aligned}\cdots\to H^q(X;\mathscr{F}')&\to H^q(X;\mathscr{F})\\ &\to H^q(X;\mathscr{F}'')\to H^{q+1}(X;\mathscr{F}')\to\cdots\end{aligned} \tag{8}$$

§ 13.7 束的上同调 (Godement 讲法)

现在采用§13.5中的术语.

在拓扑空间 X 中由闭子集构成的一个集合 Φ 称为一个支集族，若它满足：

(1) 属于 Φ 中的两个集之并仍属于 Φ；

(2) 属于 Φ 中的集之闭子集仍属于 Φ.

设 X 是一个拓扑空间，A 是一个给定的环. 设 $\mathscr{F}$ 是 X 上的一个 A 模束，用 $\Gamma(\mathscr{F})$ 来记 A 模 $\mathscr{F}(X)$，即在全空间 X 上 $\mathscr{F}$ 的截面；用 $\Gamma_\Phi(\mathscr{F})$ 来记 $\Gamma(\mathscr{F})$ 中支集属于 Φ 的截面组成的子模，此处截面 f 的支集 $S(f)$ 指 X 中的最小的闭集，使得当 $x \notin S(f)$ 时，f 在 x 上的茎中之芽 $f_x = 0$.

取 $\mathscr{L}^0 = \mathscr{C}^0(X;\mathscr{F})$ 为对 X 的每个开子集 U

$$\mathscr{L}^0(U) = \prod_{x \in U} \mathscr{F}(x), \text{其中 } \mathscr{F}(x) = \varinjlim_{V \to x} \mathscr{F}(V), \tag{9}$$

即与 $\mathscr{F}$ 相配的平展空间中 U 上的任意（连续或不连续）截面，并且对任意两开集 $U \subset V$ 而言 $\rho_U^V: \mathscr{L}^0(V) \to \mathscr{L}^0(U)$ 是 V 上截面在 U 上的限制. 容易验证 $\mathscr{L}^0$ 是一个 A 模束，并且 $\mathscr{F}$ 自然地是 $\mathscr{L}^0$ 的子束，记自然的单射为 $j: \mathscr{F} \to \mathscr{L}^0$.

重复这个做法可得 A 模束的一个序列

$$0 \to \mathscr{F} \xrightarrow{j} \mathscr{L}^0 \xrightarrow{d_0} \mathscr{L}^1 \xrightarrow{d_1} \mathscr{L}^2 \to \cdots \tag{10}$$

其中 $\mathscr{L}^1 = \mathscr{C}^0(X;\mathscr{L}^0/j(\mathscr{F}))$，而 d_0 是复合映射 $\mathscr{L}^0 \to \mathscr{L}^0/j(\mathscr{F}) \to \mathscr{L}^1$；一般地 $\mathscr{L}^k = \mathscr{C}^0(X;\mathscr{L}^{k-1}/d_{k-2}(\mathscr{L}^{k-2}))$，而 d_{k-1} 是复合映射 $\mathscr{L}^{k-1} \to \mathscr{L}^{k-1}/d_{k-2}(\mathscr{L}^{k-2}) \to \mathscr{L}^k$；(10)是正合的，称为束 $\mathscr{F}$ 的典则分解 (canonical resolution)，简记为 $\mathscr{C}^*(X;\mathscr{F})$.

对(10)中每个束，取全空间 X 上的截面，得一个 A 模上链

复形

$$0\to\Gamma_\Phi(\mathscr{F})\to\Gamma_\Phi(\mathscr{L}^0)\to\Gamma_\Phi(\mathscr{L}^1)\to\cdots \tag{11}$$

记作$C_\Phi^*(X;\mathscr{F})$,其上同调模$H^*(C_\Phi^*(X;\mathscr{F}))$称为空间$X$的系数在$\mathscr{F}$中支集在$\Phi$中的上同调模,记作$H_\Phi^*(X;\mathscr{F})$;特别当$\Phi$是所用闭子集之族,则写成$H^*(X;\mathscr{F})$.由定义可知$H_\Phi^0(X;\mathscr{F})\cong\Gamma_\Phi(\mathscr{F})$.

对于X上A模束之间的任意同态$f:\mathscr{F}\to\mathscr{F}'$诱导了上同调模之间的同态$f^*:H_\Phi^*(X;\mathscr{F})\to H_\Phi^*(X;\mathscr{F}')$.

X上的每个A模束的短正合序列

$$0\to\mathscr{F}'\to\mathscr{F}\to\mathscr{F}''\to 0 \tag{12}$$

决定了同态$H_\Phi^q(X;\mathscr{F}'')\to H_\Phi^{q+1}(X;\mathscr{F}')$,而得上同调模的长正合序列

$$\begin{aligned}\cdots\to H_\Phi^q(X;\mathscr{F}')\to H_\Phi^q(X;\mathscr{F})\to H_\Phi^q(X;\mathscr{F}'')\\ \to H_\Phi^{q+1}(X;\mathscr{F}')\to\cdots\end{aligned} \tag{13}$$

§13.8 束的Čech上同调

还可以用Čech的办法来定义束的上同调.

设给了拓扑空间X上的一个A模预束(§13.4和§13.5中预束的定义均可)$\mathscr{F}$,并且设$\mathscr{U}=\{U_\alpha\}$是X的一个开覆盖.$\mathscr{U}$的取值于$\mathscr{F}$中的一个q上链是一个函数f,它在每个$(q+1)$元组$(\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_q)$取值$f(\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_q)\in\mathscr{F}(U_{\alpha_0}\cap U_{\alpha_1}\cap\cdots\cap U_{\alpha_q})$.所有的$q$上链形成$q$上链模$C^q(\mathscr{U};\mathscr{F})$.定义上边缘同态$\delta^q$: $C^q(\mathscr{U};\mathscr{F})\to C^{q+1}(\mathscr{U};\mathscr{F})$为对$f\in C^q(\mathscr{U};\mathscr{F})$,

$$(\delta^q f)(\alpha_0,\cdots,\alpha_{q+1})$$

$$=\sum_{k=0}^{q+1}(-1)^k\rho^{U_{\alpha_0}\cap\cdots\cap\hat{U}_{\alpha_k}\cap\cdots\cap U_{\alpha_{q+1}}}_{U_{\alpha_0}\cap\cdots\cap U_{\alpha_{q+1}}}f(\alpha_0,\cdots,\hat{\alpha}_k,\cdots,\alpha_{q+1}) \tag{14}$$

其中 ^ 表示删除. 易知 $\delta^{q+1}\circ\delta^q=0$, 于是可以定义上同调 A 模

$$\check{H}^q(\mathscr{U};\mathscr{F})=\mathrm{Ker}(\delta^q)/\mathrm{Im}(\delta^{q-1}). \tag{15}$$

对 X 的所有开覆盖按加细形成的有向集而言, A 模$\check{H}^q(\mathscr{U};\mathscr{F})$集合及同态形成一个顺向系统. 取顺向极限, 记作

$$\check{H}^q(X;\mathscr{F})=\varinjlim_{\mathscr{U}}\check{H}^q(\mathscr{U};\mathscr{F}), \tag{16}$$

称为空间 X 的系数取自 A 模预束 $\mathscr{F}$ 的第 q 个 Čech 上同调模.

设给了 X 上的一个 A 模束 $\mathscr{F}$, 无论它是按 § 13.4 中或 § 13.5 中定义的束, 取其典型预束 (按 § 13.4 为截面预束, 按 § 13.5 就取它自身或等价地取其相配的平展空间的截面预束) $\tilde{\mathscr{F}}$, 令

$$\check{H}^q(X;\mathscr{F})=\check{H}^q(X;\tilde{\mathscr{F}}), \tag{17}$$

称为空间 X 的系数取自 A 模束 $\mathscr{F}$的第 q 个 Čech 上同调模.

经典的系数取自 A 模 G 的第 q 个 Čech 上同调模, 正是当将 X 上取常值 G 的束记为 $\mathscr{G}$ (无论按 § 13.4 或 § 13.5) 时, 空间 X 的系数取自 A 模束 $\mathscr{G}$ 的第 q 个 Čech 上同调模.

Čech 上同调亦有函子性, 即自然性. 但类似(8)或(13)之长正合序列的存在性, 则需要对空间 X 增加条件, 如对仿紧空间可以证明. 此外, 对仿紧空间而言, Čech 上同调与前面陈述的 Grothendieck 上同调是同构的. 而在一般情形, 这两者的联系将通过一个谱序列来实现.

§ 13.9 一个注记

回顾前后大约 20 年的发展进程, 皆起源于 1945 年 Leray 的观念. 最后, 束论及其上同调论的成熟是伴随着同调代数论的丰富成果而完成的. 其中, 体现了上同调是作为一种阻碍而呈现出来的代数结构.

当然，束论及其上同调论后来的发展及其广泛而深刻的应用，想必是 Leray 始料所不及的．但是在 Leray 最初的想法中，可能只有部分被继承和发展了，另有部分可能被搁置甚至被遗忘了．例如，原来 Leray 设想不用剖分也不用顺逆极限，而直接对链复形加以改造以获得同调或上同调．所以他引进顶盖和（Leray意义下的）束，顶盖充当上链复形，而束当时充当经典同调论中的系数群，包括了局部系数的推广．后来的发展接受 Leray 意义下的束，将其中闭集改为开集后作为预束，然后运用同调代数中导出函子的手法以获得一个上链复形，而建立上同调论．那末顶盖呢，被遗忘了！需知，当时 Leray 的想法曾在 1945 年与 A. Weil 的一次谈话后，鼓舞了 Weil 于 1947 年给出 de Rham 定理一个新的证明 [Wei]，如今已成为经典的了．那末，Leray 最初的想法还能给我们什么启发呢？

第十四章　谱序列

Leray在1946年的另一具有开创性的贡献是，利用他独出心裁的一套构作，来研究连续映射的上同调，这导致了谱序列的建立.

谱序列的观念有一个发展过程，其间J.-L. Koszul提过重要建议，最后形成Leray在1947—1950年讲义中的谱序列概念. 结合当时Leray的顶盖和束等概念，可对局部紧空间之间的任意连续映射建立谱序列.

接着J.-P. Serre和A. Borel应用谱序列获得显著成功，体现了这一新技术的巨大威力. 其中Borel应用于紧Lie群及其齐性空间的同调的计算，成果丰富. Serre则利用奇异同调，对Serre意义下的纤维化建立谱序列，而应用于球面同伦群的计算，使原来每前进一小步都极为艰难的同伦群计算，得到巨大突破而震惊世界.

此后，谱序列便成为代数拓扑学的一项常规的武器而被不断应用于许多困难问题的研究，如Atiyah-Hirzebruch［At-H 2］为K理论建立了谱序列.

§ 14.1 Leray1946 年的构作

Leray 在 1946 年的短文［Ler 3，4］中认识到，闭的连续映射引起靶空间的一个系数取自此映射所决定的纤维结构产生的束的上同调模，这是几个双分次的序列，相互之间存在复杂的关系．现简介如下．

在［Ler 3］中 Leray 首先注意到，对于任意正规空间 X 和环 A，可以对每个整数 $q\geqslant 0$，定义 X 的系数在 A 中的第 q 个上同调模束 $\mathscr{H}^q(X;A)$，它是对于 X 的任意闭子集 E，有

$$\mathscr{H}^q(X;A)(E)=H^q(E;A), \tag{1}$$

等式右端是他 1945 年长文［Ler 2］中的上同调群，这是一个 A 模束．

进而，他假设 X，Y 是正规空间，f：$X\to Y$ 是闭的连续映射，$\mathscr{F}$ 是 X 上的一个束．Leray 定义 Y 上的束 $f_*(\mathscr{F})$，为对 Y 中任意闭子集 E，

$$f_*(\mathscr{F})(E)=\mathscr{F}(f^{-1}(E)), \tag{2}$$

称为直接像．

于是，对于任意一对整数 $p\geqslant 0$ 和 $q\geqslant 0$，他引进上同调 A 模

$$P_1^{p,q}=H^p(Y;f_*(\mathscr{H}^q(X;A))). \tag{3}$$

这是全新的想法．这个想法在第二篇文章［Ler 4］中得到更为不寻常的发展．Leray 断言，对于每个 $q\geqslant 0$，在 A 模 $H^{q,0}=H^q(X;A)$ 中有一个子模序列

$$0=H^{-1,q+1}\subset H^{0,q}\subset H^{1,q-1}\subset\cdots\subset H^{q-1,1}\subset H^{q,0}, \tag{4}$$

并且对于每一对 (p,q)，在 $P_1^{p,q}$ 中有一个子模序列

$$0=Q_0^{p,q}\subset Q_1^{p,q}\subset\cdots\subset Q_{q-1}^{p,q}\subset P_{q+1}^{p,q}\subset P_q^{p,q}\subset\cdots\subset P_1^{p,q}. \tag{5}$$

相互由下面的同态正合序列相联系：

$$0 \to Q_{q-1}^{p,q} \to P_{q+1}^{p,q} \xrightarrow{I^{p,q}} H^{p,q}/H^{p+1,q-1} \to 0. \tag{6}$$

及对每个满足 $1 \leqslant r \leqslant q$ 的 r，

$$0 \to P_{r+1}^{p,q} \to P_r^{p,q} \xrightarrow{\Delta_r^{p,q}} Q_r^{p+r+1,q-r}/Q_{r-1}^{p+r+1,q-r} \to 0. \tag{7}$$

一旦 $P_r^{p,q}$ 和 $\Delta_r^{p,q}$ 都知道，则(4)中序列的前后项之商也都知道．这是了解由 f 建立的 X 和 Y 的上同调之间的关系的主要步骤．特别当 A 是域时，向量空间 $H^q(X;A)$ 当所有的商 $H^{p,q}/H^{p+1,q-1}$ 都知道时便完全确定．

不过，Leray 只给出了不完全的概述，因而非常难懂．

§ 14.2　Leray1947 年的构作

Leray1947 年在法兰西学院讲演时［Ler 10］，他采纳了当时还是研究生的 J.-L. Koszul 的两点建议．其一是微分 A 模(M, d)概念，其中 M 是一个 A 模，而 A 是一个给定的环，d 是 M 的一个满足 $d \circ d = 0$ 的自同态，称作微分．Leray 进而设 M 是一个代数，而且 d 是一个求导法，即满足 Leibniz 法则 $d(a \cdot b) = da \cdot b + \alpha(a) \cdot db$，其中 α 是 M 的一个自同构．其二，Koszul 发现 Leray 的上述公式（见 § 14.1）中隐藏的代数模式滲透（filtration)，这个名称是 H. Cartan 建议的，而 Leray 自己则用过亚赋值（法文 sousvalué)，因为这与经典的赋值概念接近．

利用滲透，顶盖和束，Leray 建立了上同调谱序列概念．应用于连续映射，则给定的连续映射决定了一个滲透，从而决定了一个上同调谱序列．这个谱序列表述了源空间，靶空间和纤维之间的关系．如果给的是一个纤维丛，则谱序列正是联系着全空间，底空间和典型纤维的上同调的关系．

微分 A 代数(M,d)上的一个取值为整数或 $+\infty$ 的函数 f 称为一个滲透，如果它满足条件：对任 $a,b\in M$, $f(\alpha(a))=f(a)$, $f(a-b)\geqslant\min\{f(a),f(b)\}$; $f(ab)\geqslant f(a)+f(b)$; $f(0)=+\infty$. 设 $M^{(p)}=\{a\in M; f(a)\geqslant p\}$, 则上述条等价于: $M^{(p)}$是一个加法群; $M^{(p+1)}\subset M^{(p)}$; $M^{(p)}\cdot M^{(q)}\subset M^{(p+q)}$; $\lim\limits_{p\to-\infty}M^{(p)}=M$. 作加法群 $M^{(p)}/M^{(p+1)}$; 设 $a^{(p)}\in M^{(p)}$, $a^{(q)}\in M^{(q)}$, 令

$$
\begin{aligned}
&(a^{(p)}\operatorname{mod}M^{(p+1)})(a^{(q)}\operatorname{mod}M^{(q+1)})\\
&=a^{(p)}a^{(q)}\operatorname{mod}M^{(p+q+1)},
\end{aligned}
\tag{8}
$$

则作直和便得一个分次 A 代数

$$
\mathscr{G}M=\bigoplus_{p\in\mathbf{Z}}M^{(p)}/M^{(p+1)},
\tag{9}
$$

称为滲透代数 M 的分次代数.

M 中满足 $dc=0$ 的元素 c 称为 M 的上闭链，它们组成子代数$Z(M)$; M 中所有形如 da 的元素称为上边缘，它们组成 $Z(M)$ 的一个双边理想 $B(M)$. 商代数

$$
H(M)=Z(M)/B(M)
\tag{10}
$$

称为(M,d)的上同调代数.

(M,d)上的一个滲透 f 诱导出$H(M)$上的一个滲透如下. 记 $Z^{(p)}=M^{(p)}\cap Z(M)$, 和 $B^{(p)}=M^{(p)}\cap B(M)$, 有 $B^{(p)}\subset Z^{(p)}$. $Z^{(p)}$在 $H(M)$中之像记作 $F^pH(M)=Z^{(p)}/B^{(p)}$, 这是 $H(M)$的一个滲透，关于此滲透的分次代数是

$$
\mathscr{G}H(M)=\bigoplus_{p\in\mathbf{Z}}F^pH(M)/F^{p+1}H(M).
\tag{11}
$$

另一方面，记$Z_r^{(p)}=\{c\in M^{(p)}; dc\in M^{(p+r)}\}$, 其中元素可以看成 $Z^{(p)}$中元素的“逼近”. 由 $M^{(p+1)}\subset M^{(p)}$得 $Z_{r-1}^{(p+1)}\subset Z_r^{(p)}$, 并由 $d\circ d=0$ 得 $B_{r-1}^{(p)}=dZ_{r-1}^{(p+1-r)}\subset Z_r^{(p)}$. 令

$$
E_r^p=Z_r^{(p)}/(Z_{r-1}^{(p+1)}+B_{r-1}^{(p)}),
\tag{12}
$$

由包含关系

$$
\begin{aligned}
0=B_0^{(p)}\subset B_1^{(p)}\subset\cdots\subset B_s^{(p)}\subset B_{s+1}^{(p)}\subset\cdots\subset B^{(p)}\subset Z^{(p)}\\
\subset\cdots\subset Z_{r+1}^{(p)}\subset Z_r^{(p)}\subset\cdots\subset Z_1^{(p)}\subset Z_0^{(p)}=M^{(p)},
\end{aligned}
\tag{13}
$$

可看出 $E_r^{(p)}$是"逼近"于

$$E_\infty^p = F^pH(M)/F^{p+1}H(M)$$
$$= Z^{(p)}/(Z^{(p+1)} + B^{(p)}). \tag{14}$$

对任意 p，由上面定义可知 d：$Z_r^{(p)} \to Z_r^{(p+r)}$且 $d: B_{r-1}^{(p)} + Z_{r-1}^{(p+1)} \to B_{r-1}^{(p+r)}$. 由此定义了一个同态

$$d_r:\ E_r^p \to E_r^{p+r}, \tag{15}$$

且由 $d \circ d = 0$ 得知 $d_r \circ d_r = 0$. 故 d_r 是分次模 $E_r = \bigoplus_{p \in \mathbf{Z}} E_r^p = E_r(M)$ 上的一个次为 r 的微分. 关于此微分 d_r 的上同调是

$$H^p(E_r) = E_{r+1}^p, \text{对任意的 } p, \tag{16}$$

或等价地

$$H^*(E_r) = E_{r+1}. \tag{17}$$

特别，当 M 的渗透有限时，即存在 u，$v \in \mathbf{Z}$ 使得当 $p < u$ 时 $M^{(p)} = M$，当 $p > v$ 时 $M^{(p)} = 0$，则对于 $r \geqslant v - u$，有 $E_r = \mathscr{G}H\ (M)\ = E_\infty$.

一般地，所得序列$\{E_r, d_r\}$称为渗透微分代数(M, d, f)的谱序列(spectral sequence).

如果起初给的是一个分次微分代数

$$M = \bigoplus_{q \in \mathbf{Z}} M_q, \quad d(M_q) \subset M_{q+1}, \tag{18}$$

且其分次与渗透 f 相容，即

$$M^{(p)} = \bigoplus_{q \in \mathbf{Z}} M_q \cap M^{(p)}. \tag{19}$$

则记

$$Z^{pq} = Z^{(p)} \cap M_{p+q}, \quad B^{pq} = B^{(p)} \cap M_{p+q},$$
$$Z_r^{pq} = Z_r^{(p)} \cap M_{p+q}, \quad B_r^{pq} = B_r^{(p)} \cap M_{p+q}. \tag{20}$$

从而$Z^{(p)} = \bigoplus_q Z^{pq}$，$B^{(p)} = \bigoplus_q B^{pq}$，$Z_r^{(p)} = \bigoplus_q Z_r^{pq}$，$B_r^{(p)} = \bigoplus_q B_r^{pq}$，并对每一对$(p, q)$有

$$0 = B_0^{pq} \subset B_1^{pq} \subset \cdots \subset B_s^{pq} \subset B_{s+1}^{pq} \subset \cdots \subset B^{pq} \subset Z^{pq} \subset \cdots$$
$$\subset Z_{r+1}^{pq} \subset Z_r^{pq} \subset \cdots \subset Z_1^{pq} \subset Z_0^{pq} = M^{(p)} \cap M_{p+q}, \tag{21}$$

而且 $B_{r-1}^{pq} \subset Z_r^{pq}$，$Z_{r-1}^{p+1,q-1} \subset Z_r^{pq}$，从而可定义

$$E_r^{pq} = Z_r^{pq} / (Z_{r-1}^{p+1,q-1} + B_{r-1}^{pq}), \tag{22}$$

其中 p 称为滲透次，q 称为余次，$p+q$ 称为全次．这时有

$$d_r(E_r^{pq}) \subset E_r^{p+r,q-r+1}. \tag{23}$$

而在 $E_{r+1} = H(E_r)$ 中看，E_{r+1}^{pq} 中元素都是 E_r^{pq} 中 d_r 上闭链的上同调类．而且 E_r^{pq}“逼近”于

$$E_\infty^{pq} = F^p H^{p+q}(M) / F^{p+1} H^{p+q}(M). \tag{24}$$

Leray 在这篇文章中，将上述纯代数的构作应用于连续映射．当时，他设 X，Y 为局部紧空间，f：$X \to Y$ 是连续映射．借助他的顶盖和他的正常束两个概念（见 § 13.3），设给了 X 上的一个正常束 $\mathscr{B}$ 和 X 上一个精细顶盖 $\mathscr{X}$，以及 Y 上的一个精细顶盖 $\mathscr{Y}$，利用连续映射 f，可诱导出空间 Y 上的一个滲透微分代数

$$\mathscr{Y} \circ f(\mathscr{X} \circ \mathscr{B}) = f(f^{-1} \mathscr{Y} \circ \mathscr{X} \circ \mathscr{B}), \tag{25}$$

其对应的谱序列记作 $\{E_r, d_r, r \geqslant 2\}$，且

$$E_2 = H(Y; f\mathscr{F}(X; \mathscr{B})), \tag{26}$$

其中 $\mathscr{F}(X;\mathscr{B})$ 是空间 X 上的系数取自束 $\mathscr{B}$ 的上同调代数所成的束，$f\mathscr{F}(X;\mathscr{B})$ 是利用连续映射 f 得到的直接像，它是空间 Y 上的一个束．还有

$$\mathscr{G}H(f^{-1} \mathscr{Y} \circ \mathscr{X} \circ \mathscr{B}) \subset \lim_{r \to +\infty} E_r, \tag{27}$$

其中 $H(f^{-1} \mathscr{Y} \circ \mathscr{X} \circ \mathscr{B})$ 其实就是 $H(X;\mathscr{B})$（见 § 13.3 Leray 的唯一性定理），但赋有由上述滲透而得的滲透．

注记．Leray 当时对任意两个整数 $l < m$，由 f 定义出 Y 上一个滲透微分代数

$$\mathscr{Y}^m \circ f(\mathscr{X}^l \circ \mathscr{B}) = f(f^{-1} \mathscr{Y}^m \circ \mathscr{X}^l \circ \mathscr{B}), \tag{25'}$$

此处只介绍其中取 $l=0$ 及 $m=1$ 的情形．

特别，若所考虑的连续映射是一个纤维丛的投射，即设 E 是全空间，B 是底空间，π：$E \to B$ 是投射，F 是典型纤维．设

空间 E 上给定了 A 代数 M 的常值束. 则按上所述得到的谱序列 $\{E_r, d_r, r \geqslant 2\}$, 有

$$E_2 = H^*(B; \{H^*(F; M)\}), \tag{28}$$

其中右端为局部系数的上同调代数, 具体写出来, 对于每一对 (p, q),

$$E_2^{pq} = H^p(B; \{H^q(F; M)\}). \tag{29}$$

同时(27)式就是

$$\mathscr{G}H^*(E; M) \subset \lim_{r \to +\infty} E_r, \tag{30}$$

其中 $H^*(E; M)$ 带有相应的渗透.

一旦(28)和(29)中的局部系数是常系数, 则可以很方便地进行处理. 许多实际应用场合属于这种情形.

§ 14.3 Serre 对奇异同调建立谱序列

A. Borel 在其博士论文 [Bor 2] 中, 直接采用 Leray 的上同调及其谱序列应用于紧 Lie 群及其齐性空间的上同调, 得到重要成果, 这里的上同调是紧支上同调. Serre 在他的博士论文 [Ser 1] 中则希望运用谱序列来研究同伦群. 因此 Serre 要采用奇异同调论. 他采用方体奇异同调, 这与单形奇异同调等价. 然后他注意到道路空间是一个 Serre 纤维化或弱纤维化 (见 § 11.5). 于是他模仿 Leray 的做法, 得到相应的谱序列, 同调谱序列, 这里用到上升的渗透. 读者可以参考 [Sp 2].

设 X 是一个单连通的空间, Ω 表 X 的具有紧开拓扑的道路空间, 即 $\Omega = \{f: I \to X; f \text{ 连续}\}$. 设 A, B 是 X 的子集, 记 $\Omega_{AB} = \{f \in \Omega; f(0) \in A, f(1) \in B\}$, 令 $\rho: \Omega_{AB} \to A \times B$ 为 $\rho(f) = (f(0), f(1))$. 则 $(\Omega_{AB}, \rho, A \times B)$ 是一个 Serre 纤维化, 而纤维可

视为 X 上的环路空间 Ω_{xx},其中 $x\in X$ 任意.存在 Ω_{AB}的方体奇异链复形的一个上升渗透,使其同调谱序列 $\{E_r, d_r, r\geqslant 2\}$ 满足

$$E_2^{pq}=H_p(A\times B;H_q(\Omega_{xx})),\tag{31}$$

其中 $H_q(\Omega_{xx})$ 的系数群为整数群，而 $H_q(\Omega_{xx})$ 充当常系数群，并且

$$E_\infty=\mathscr{G}H_*(\Omega_{AB}).\tag{32}$$

Serre 正是利用这个谱序列做出他震惊世人的重大成果，其中有：如果 n 是偶数，$\pi_{2n-1}(S^n)$是 $\mathbf{Z}$ 和一个有限群的直和;除上述情形外,只要 $m>n$,$\pi_m(S^n)$是一个有限群. Serre 的这项成就将同伦群的计算推进了一大步，同时也实证了谱序列是一项强有力的新技术. 进而由 [Ser 2, 3, 4] 及 [To 1] 可知，单连通有限复形的同伦群都是有限生成的，并且是可实际计算的.

§14.4 超 度

超度（transgression）这个重要概念的一个特殊情形首先是由陈省身在 1946 年 [Che 1; Th. 8] 中引进的. 后来，1948 年 G. Hirsch 在 [HirG] 中，对于一个局部平凡纤维丛(E,π,B,F),定义了 $H^s(F;M)$的一个子模,$H^{s+1}(B;M)$的一个商模,以及前者到后者的一个同态, $s=0,1,\cdots$. 差不多同时，Koszul [Kos] 在研究紧 Lie 群的齐性空间的上同调群时，他应用 E. Cartan 的方法，专门讨论了 Lie 代数和 Lie 代数的上同调群，对 Lie 代数的上同调群定义了超度.

Serre 和 A. Borel 都用到了超度. Serre 在 [Ser 1] 中，对一个一般的分次微分模 M 的谱序列给出了超度的定义. 他实际用到的超度概念是对同调定义的，此时取同调谱序列，对应的渗透是上升的. A. Borel 在 [Bor 2] 中，广泛运用了超度以得到

他关于 Lie 群的分类空间的上同调．他在该文中列出了超度的四种定义．其中第四种定义如下．

设(E,π,B,F)是局部平凡的纤维空间，E 是连通且局部连通的全空间，B 是局部连通的底空间，F 是连通的典型纤维．设 M 是一个交换的A 代数，其中 A 是给定的交换环．则按 Leray理论，存在一个谱序列$\{E_r,d_r,r\geqslant 2\}$，其中 $E_2^{p,q}=H^p(B;H^q(F;M))$，并且收敛于 $H(E;M)$适当渗透后的分次代数．$E_{s+1}^{0,s}$($s\geqslant 2$)是 $E_2^{0,s}$的子模，由在 $d_2,\cdots,d_s$ 作用之下是上闭链的那些元素所组成；而 d_{s+1}是将 $E_{s+1}^{0,s}$映入 $E_{s+1}^{s+1,0}$的同态，它称为超度．通常说成 $H^s(F;M)$(即 $E_2^{0,s}$)中的一个子模 $T^s(F;M)$到 $H^{s+1}(B;M)$(即 $E_2^{s+1,0}$)的一个商模 $H^{s+1}(B;M)/N_{s+1}$(即 $E_{s+1}^{s+1,0}$)的同态 τ_s(即 d_{s+1})；$T^s(F;M)$中元素称为可超度的(trangressive)．

§14.5　Massey 的正合偶

美国人 W．Massey 于 1952 年发表了［Mas 1，2］，他引进正合偶（exact couple）概念：一对模以及三个同态

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & A \\ & {}_{h}\nwarrow \quad \swarrow_{g} & \\ & C & \end{array} \qquad (33)$$

称为一个正合偶，如果 $\mathrm{Im}f=\mathrm{Ker}g$，$\mathrm{Im}g=\mathrm{Ker}h$，$\mathrm{Im}h=\mathrm{Ker}f$，记作〈$A$，$C$；$f$，$g$，$h$〉或〈$A$，$C$〉．

设〈A，C；f，g，h〉是一个正合偶．若令 $d=g\circ h$：$C\to C$，则显然有 $d^2=0$．故（C，d）是一个微分模．设 $C'=H(C)$是其同调模，令 $A'=\mathrm{Im}f=\mathrm{Ker}g$．因 $h(Z(C))\subset A'$，

$h(B(C))=0$,从而 h 诱导了同态 $h':C'=Z(C)/B(C)\to A'$.若令 f': $A'\to A'$ 为 f 在 A' 上之限制，易见存在确定的同态 g': $A'\to C'$，使图表

$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{f'} & A' \\ & \nwarrow_{h'} \quad \swarrow_{g'} & \\ & C' & \end{array} \tag{34}$$

仍构成一个正合偶，称为〈A，C〉的导出偶.

如果从一对双分次的模 A，C 和齐次同态 f，g，h 构成的一个正合偶出发，重复构作导出正合偶，便得一个微分模序列 $\{C^{(n)},\ d^{(n)}\}$. 可以证明，这样得到的微分模序列实际上是一个谱序列 $\{E_r,\ d_r\}$.

Massey 说，Leray 谱序列中上同调的乘法结构没有包括进去. 尽管有这点不足，但作为 Leray 谱序列的一个导引，还是很有价值的. 胡世桢的书 [Hu 2] 和廖山涛的讲义 [廖刘]，是按这种方式陈述的，读者可以参考.

§ 14.6　Lie 群的同调

Lie 群同调的研究是 1925 年以后兴起的. 早期主要的推动者是 H. Weyl 和 E. Cartan. E.Cartan 的一个定理说：任意连通 Lie 群必微分同胚于其最大的紧连通子群与微分同胚于某个 $\mathbf{R}^n$ 的子簇的拓扑积. 从而 Lie 群的同调归结为紧 Lie 群的同调. 对紧 Lie 群，E.Cartan 采纳了 Poincaré 关于积分与同调相关联的看法. 这个观点导致 de Rham 定理的建立. E.Cartan 正是在 [CE 2] 中计算了紧 Lie 群 G 的 de Rham 上同调 $H^*(G)$，即实系数的上同调，从而得到 G 的 Betti 数. 他还证明了任意紧 Lie 群 G 的 Euler-Poincaré 示性数 $\chi(G)$ 等于 2^l. 这个方法亦可应用于

由紧 Lie 群的商空间所成的齐性空间，E.Cartan 及 Ehresmann 均就一些特例进行过研究.

到了 1936 年，R.Brauer [Bra 2] 用明显的方式对典型群中 A，B，C，D 四大类计算了 $H^*(G)$. Pontrjagin [Pt 7] 也独立地得到类似结果. 他们的结果验证了老 Cartan 早先的猜测：这些典型群 G 的实同调与 l 个奇数维的球面的拓扑积

$$S^{m_1} \times S^{m_2} \times \cdots\cdots \times S^{m_l}$$

的一样,其中 l 是 G 的秩(即 G 中最大环面的维数). 五个例外群 E_6, E_7, E_8, F_2, G_2 的 Betti 数迟到 1949 年才由严志达[Y]获得.

Leray 在 1946 年 [Ler 6] 建立谱序列时就想到用于典型群(连通的半单紧 Lie 群) G 关于其最大环面 T 之商空间所成的纤维丛，那时他就能计算实系数上同调 $H^*(G/T; \mathbf{R})$. 在 1949 年 [Ler 9] 中，Leray 推广到对满足 $T \subset U \subset G$ 的闭连通子群 U 的商空间 G/U 的实系数上同调 $H^*(G/U; \mathbf{R})$ 的计算. 运用谱序列，他证明了 G.Hirsch 的一个猜想如下：G 和 U 的 Poincaré 多项式由 Hopf 定理 [Hop 10] 已知为

$$P(G;t) = (1 + t^{2m_1-1})\cdots(1 + t^{2m_l-1}),$$
$$P(U;t) = (1 + t^{2n_1-1})\cdots(1 + t^{2n_l-1}),$$

其中 $m_1 \leqslant m_2 \leqslant \cdots \leqslant m_l$，$n_1 \leqslant n_2 \leqslant \cdots \leqslant n_l$. Hirsch 猜想

$$P(G/U;t) = \frac{(1 - t^{2m_1-1})\cdots(1 - t^{2m_l-1})}{(1 - t^{2n_1-1})\cdots(1 - t^{2n_l-1})}.$$

A. Borel 于 1952 年的学位论文 [Bor 2] 及接下来的文章 [Bor 3，4，5] [Bor-S 1，2] [Bor-C] [Bor-H] 中建立了全面的理论，以上述结果为其特款. 他所用的主要工具是对给定的紧 Lie 群 G，对充分大的 n，在 n 万有主丛 (P_G, B_G, G) 的谱序列中运用超度，还用到 Steenrod 约化乘幂. 所得成果被认为对所有紧 Lie 群而言，其上同调环 $H^*(G; \mathbf{Z})$ 可完全决定.

第十五章　上同调运算

从 20 世纪 30 年代初期起，不同的动机推动人们想到定义上同调．同调与上同调是各有优缺点的，在不同的问题上表现不一样．后来有了万有系数定理．人们知道，从加法群的角度来看，上同调提供了和同调相同的不变量．我们不应消极地看待这个重要结论，它在逻辑上保证了这两种理论的等效性，使我们可将注意力放在根据具体问题的特性来运用我们的理论．

差不多在上同调概念产生之初，人们就想到定义上同调类之间的乘法：上积．两个空间可以有相同的（同构的）同调群及上同调群，但有不同的上同调乘法运算．

20 世纪 40 年代的深入研究，又进一步发现了一些新的上同调运算，如 Pontrjagin 平方，Steenrod 平方和 Steenrod 约化幂．它们的出现都伴随着重要拓扑问题的进展．

§ 15.1　上积与到球面的映射

到 1937 年已经完全解决了 n 维有限单纯复形 K 到 n 维球面 S^n 的连续映射的同伦分类问题，用上同调的语言表达，就是 Hopf-Hurewicz-Whitney 定理：存在一个自然的一一对应

$$[K;S^n]\to H^n(K;\pi_n(S^n))\cong H^n(K;\mathbf{Z}),\tag{1}$$

对于 $f:K\to S^n$, $[f]\in[K;S^n]$ 是 f 所在的同伦类，它对应于 $f^*(s_n)$，其中 s_n 是 S^n 的基本上同调类(参见 §9.10).

下一步是考虑 $(n+1)$ 维有限单纯复形 K 到 n 维球面 S^n 的连续映射的同伦分类问题. 第一个重要例子是 Hopf 于 1930 年得到的历史性结果

$$\pi_3(S^2)\cong\mathbf{Z}, \tag{2}$$

这个结果后来被 Freudenthal 于 1937 年 [Freu 1] 发展，得到

$$\pi_{n+1}(S^n)\cong\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \quad 当\ n\geqslant 3. \tag{3}$$

Pontrjagin 也独立得到这个结果. 这个结果自然导致当 K 的维数是 $n+1$ 时，集合 $[K, S^n]$ 的计算. Pontrjagin1938 年在 [Pt 3] 中宣布了一个解答，后来发现，当 $n\geqslant 3$ 时它是错误的. 1941 年，Pontrjagin 在一篇长文 [Pt 5] 中详细证明了 $n=2$ 时的定理，其结果简述如下.

设 K 是一个 3 维有限单纯复形. 设两个连续映射 $f, g: K\to S^2$ 相互同伦，则它们在 K 的 2 维骨架 K_2 上的限制是同伦的. 从而由 Hopf-Hurewicz-Whitney 定理，当且仅当 $f^*(s_2)=g^*(s_2)$. 我们先假设 $f,g:K\to S^2$ 是两个连续映射，它们满足 $f^*(s_2)=g^*(s_2)$，即它们在 K_2 上的限制是同伦的，则 g 同伦于一个 g'，使得 $g'|K_2=f|K_2$. 于是可定义一个差别类 $D(f,g')\in H^3(K;\pi_3(S^2))$. Pontrjagin 定理说，$f$ 与 g' 同伦(从而 f 与 g 同伦)的充要条件是，存在一个 1 维上同调类 $e_1\in H^1(K;\pi_2(S^2))=H^1(K;\mathbf{Z})$，使得

$$D(f,g')=2e_1\cup f^*(s_2). \tag{4}$$

从这个定理也可看出上积 $\cup$ 所起的作用. 但这个定理要推广到 $n\geqslant 3$ 目前还有困难，因为只用上积是不行的，需要新的乘法，即下面讲到的 Steenrod 平方运算.

§ 15.2 Steenrod 平方

Steenrod 在 1947 年发表的 [Ste 5] 中，推广了关于上积的 Čech-Whitney 定义（参考 § 5.6）. 设 K 是一个有限单纯复形. 在 K 中一个 $(p+q)$ 维单形 ζ 可被分解为只有一个公共顶点的一个 p 维单形 σ 和一个 q 维单形 τ 所张而成. 设 u 和 v 分别是 p 维和 q 维的值取自系数群 G 中的上链. 则它们的上积 $u \cup v$ 定义为 $\langle u \cup v, \zeta\rangle = \langle u, \sigma\rangle\langle v, \tau\rangle$，这里假设定向是适当的. Steenrod 推广了这个想法，设 ζ 是一个 $(p+q-i)$ 维单形，它被分解为有 $i+1$ 个公共顶点的一个 p 维单形 σ 和一个 q 维单形 τ 所张而成. 这种分解有多种办法. Steenrod 定义 p 维上链 u 和 q 维上链 v 的上 i 积(cup i-product) $u \cup_i v$ 为

$$\langle u \cup_i v, \zeta\rangle = \sum \pm \langle u, \sigma\rangle \langle v, \tau\rangle, \tag{5}$$

求和号对 ζ 的种种分解进行，按定向之取法带上正负号. 当时为有效地进行计算，他给 K 的全体顶点赋以全序. 而且还要证明最后所得上同调运算与全序之选取无关. 这个过程相当复杂. 不过 Steenrod 的文章写得很好，这一点是世界知名的，读者去阅读它会感到是一种享受.

其中的困难是由复杂的上边缘公式引起的，从而为由上链的上 i 积定义出只依赖于上同调类的运算，采用下述手法. 设 G 和 G' 是两个阿贝尔群，并且给了一个对称的双线性形式

$$G \times G \to G', \tag{6}$$

设 $\langle u, \sigma\rangle$ 和 $\langle v, \tau\rangle \in G$，则 (5) 中右端式中 $\langle u, \sigma\rangle\langle v, \tau\rangle$ 为按 (6) 之双线性形式之值 $\in G'$. 从而最后对所有的整数 $m \geqslant i \geqslant 0$，由 $\cup_{m-i}$ 定义了同态

$$Sq^i: H^m(K; G) \to H^{m+i}(K; G'/2G'), \tag{7}$$

这就是所谓的 Steenrod 平方运算．它还可对相对上同调定义

$$Sq^i: H^m(K,L;G)\to H^{m+i}(K,L;G'/2G'),\tag{8}$$

其中 L 是 K 的一个子复形．

Steenrod 在同一篇文章中，应用平方运算将 §15.1 中的 Pontrjagin 定理推广到 $n\geqslant 3$ 的情形．Steenrod 定理说，设 $n\geqslant 3$，K 是一个 $(n+1)$ 维的有限单纯复形，$f,g:K\to S^n$ 是连续映射，它们在 K 的 n 维骨架 K_n 上重合，则可定义其差别类 $D^{n+1}(f,g)\in H^{n+1}(K;\pi_{n+1}(S^n))$．$f$ 与 g 同伦的充要条件是存在一个 $(n-1)$ 维上同调类 $e^{n-1}\in H^{n-1}(K;\pi_n(S^n))$ 使得

$$D^{n+1}(f,g)=Sq^2e^{n-1},\tag{9}$$

这里采用(7)中的 Sq^i，其中 $G=\pi_n(S^n)$，$G'=\pi_{n+1}(S^n)$，而双线性形式(6)满足条件：若 α_n 是 $\pi_n(S^n)$ 中生成元，β_{n+1} 是 $\pi_{n+1}(S^n)$ 中生成元，则

$$\alpha_n\cdot\alpha_n=\beta_{n+1}.\tag{10}$$

有时我们取 G 和 G' 均为 $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$，此时称 Sq^i 为 Steenrod 约化平方运算．还可推广到拓扑空间偶对范畴，此时采用奇异上同调．则有以下四条基本性质．

(1) 对每个空间对 (X,Y) 和非负整数对 (m,i) 有一个加法同态

$$Sq^i: H^m(X,Y)\to H^{m+i}(X,Y).\tag{11}$$

(2) 自然性　若 $f:(X,Y)\to(X',Y')$ 是连续映射，则

$$Sq^i\circ f^*=f^*\circ Sq^i.\tag{12}$$

(3) 若 $a\in H^m(X,Y)$，则 $Sq^0a=a$，$Sq^ma=a\cup a$，并且对 $i>m$ 有 $Sq^ia=0$．

(4) 有恒等式

$$Sq^k(a\cup b)=\sum_{i+j=k}Sq^i(a)\cup Sq^j(b).\tag{13}$$

最后这个重要的恒等式等价于下一个等式

$$Sq^k(a\times b)=\sum_{i+j=k}Sq^i(a)\times Sq^j(b).\tag{14}$$

这两个恒等式通常称为 Cartan 公式，其实是由吴文俊告知 [Di 1] H. Cartan，而由后者发表的 [CH 4].

以上四条性质刻划了 Steenrod 约化平方运算，故可采用作为公理系统而使之公理化.

所有模 2 约化的 Steenrod 平方运算可加和可乘而成为一个代数，称为 Steenrod 模 2 代数. 在这个代数中有下面重要的关系，也是由吴文俊猜测 [Di 1] 而由墨西哥人 J. Adem 证明的 [Ade].

(5) Adem 公式

$$Sq^iSq^j = \sum_{0\leqslant k\leqslant [i/2]} \binom{j-k-1}{i-2k} Sq^{i+j-k}Sq^k,\ 0 < i < 2j, \tag{15}$$

其中 $[i/2]$ 表最大的 $\leqslant i/2$ 的整数，而二项系数是模 2 的整数. 利用这个公式容易证明此代数由 i 为 2 的幂的 Sq^i 所生成.

利用上同调运算代数的深入的性质，英国人 J. F. Adams 于 1960 年 [Ad 1] 证明了，在不同维数的球面中，只有 S^0，S^1，S^3 和 S^7 可以建立 H 空间结构. 它们分别可作为幺模的实数，复数，四元数和 Cayley 八元数而带有熟知的乘法. 这就结束了一个历史悠久的代数学问题.

§ 15.3 Steenrod 约化乘幂

Steenrod 在 1950 年的国际数学家大会上宣布 [Ste 7, 9]，他发现了一系新的上同调运算，称为约化乘幂，这些是平方运算的推广. 他指出新想法是受到 Lefschetz 关于上积的定义的启发. Lefschetz 在 1942 年的书 [Le 12] 中，利用 $H^*(X\times X;\ \Lambda)$ 中的叉积 (cross-product) $a\times b$，经对角映射 δ: $X\to X\times X$ 拉回

到 $H^*(X;A)$ 而定义上积 $a\cup b$. Steenrod 想到利用 $X\times X$ 来重新定义平方运算，并将其推广到 p 重乘积 $X\times\cdots\times X$ 的情形，其中运用了 P. Smith-M. Richardson [Ri-S] 的技术.

后来，Steenrod 在普林斯顿大学出版的讲义 [Ste-E] 中，采用了公理化的办法来定义平方运算和乘幂运算，并证明了存在性和唯一性. Steenrod 给出的公理如下.

平方运算的公理系统 系数群取为 $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

(1) 对任意两个整数 $i\geqslant 0$ 和 $n\geqslant 0$, 及任意空间对 (X, A), 有一加法同态，称为增 i 平方(square upper i)

$$Sq^i: H^n(X,A)\to H^{n+i}(X,A),$$

使得若 $f:(X,A)\to(Y,B)$ 连续，则

$$Sq^i\circ f^* = f^*\circ Sq^i.$$

(2) $Sq^0=1$.

(3) 若 $x\in H^n(X, A)$, 则 $Sq^n x = x^2$.

(4) 若 $i>n$, 则 $Sq^i=0$.

(5) Cartan 公式

$$Sq^k(xy) = \sum_{i=0}^{k} Sq^i x\cdot Sq^{k-i}y.$$

(6) Sq^1 是系数群的短正合序列

$$0\to\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}\to 0$$

的 Bockstein 同态 β.

(7) Adem 关系式 若 $0<a<2b$ 则

$$Sq^aSq^b = \sum_{j=0}^{[a/2]}\binom{b-j-1}{a-2j}Sq^{a+b-j}Sq^j,$$

其中二项系数取模 2.

所有平方运算所成的代数记作 $\mathscr{A}(2)$.

约化乘幂运算的公理系统 设 p 是一个奇素数并设短正合序列

$$0\to\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}\to 0$$

的 Bockstein 同态为 β，则 β 有自然性且 $\beta^2=0$ 并且

$$\beta(xy)=\beta(x)y+(-1)^q x\beta(y),$$

其中 $q=\dim x$. 下面系数群取为 $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$.

（1）对任意两整数 $i\geqslant 0$ 和 $q\geqslant 0$，及任意空间对（X，A），有一加法同态称为约化乘幂（reduced power）

$$P^i: H^q(X,A)\to H^{q+2i(p-1)}(X,A),$$

使得若 $f:(X,A)\to(Y,B)$连续，则

$$P^i\circ f^*=f^*\circ P^i.$$

（2）$P^0=1$.

（3）若 $\dim x=2k$，则 $P^k x=x^p$.

（4）若 $2k>\dim x$，则 $P^k x=0$.

（5）Cartan 公式

$$P^k(xy)=\sum_{i=0}^{k}P^i x\cdot P^{k-i}y.$$

（6）Adem 关系式　若 $a<pb$，则

$$P^aP^b=\sum_{t=0}^{[a/p]}(-1)^{a+t}\binom{(p-1)(b-t)-1}{a-pt}P^{a+b-t}P^t.$$

若 $a\leqslant b$，则

$$P^a\beta P^b=\sum_{t=0}^{[a/p]}(-1)^{a+t}\binom{(p-1)(b-t)}{a-pt}\beta P^{a+b-t}P^t$$

$$+\sum_{t=0}^{[(a-1)/p]}(-1)^{a+t-1}\binom{(p-1)(b-t)-1}{a-pt-1}P^{a+b-t}\beta P^t.$$

关于约化乘幂的细节及某些应用，读者可参考［Set-E］.

§15.4　Pontrjagin 乘幂

Pontrjagin 在 1942 年的一篇文章［Pt 6］中定义了从系数为 $\mathbf{Z}/2^r\mathbf{Z}$ 的上同调类到系数为 $\mathbf{Z}/2^{r+1}\mathbf{Z}$ 的上同调类的一个上同调

运算

$$\mathfrak{P}_2: H^{2n}(K;\mathbf{Z}/2^r\mathbf{Z}) \to H^{4n}(K;\mathbf{Z}/2^{r+1}\mathbf{Z}).$$

它被称为 Pontrjagin 平方. 后来于 1956 年, Steenrod [Ste 12] 及 1957 年 E. Thomas [Ths] 做了如下推广. 对任意素数 p, 可定义一个上同调运算

$$\mathfrak{P}_p: H^i(K; \mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z}) \to H^{pi}(K; \mathbf{Z}/p^{r+1}\mathbf{Z}).$$

有以下性质:

(1) 若 η: $\mathbf{Z}/p^{r+1}\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z}$ 是自然同态, η_* 是对应的上同调同态, 则

$$\eta_*(\mathfrak{P}_p x) = x^p.$$

(2) 若 ρ: $\mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/p^{r+1}\mathbf{Z}$ 是自然单射, ρ_* 是对应的上同调同态, 则

$$\mathfrak{P}_p(x+y) = \mathfrak{P}_p x + \mathfrak{P}_p y + \sum_{i=1}^{p-1} \left(\frac{1}{p}\binom{p}{i}\right)\rho_*(x^i \cup y^{p-i}).$$

(3) $\mathfrak{P}_p(x \cup y) = \mathfrak{P}_p x \cup \mathfrak{P}_p y$.

(4) 若 p 是奇数且 $\dim x$ 也是奇数, 则 $\mathfrak{P}_p x = 0$.

第十六章 Eilenberg-MacLane 空间和 Postnikov 塔

从 1941 年开始，人们研究同伦群与同调群之间的更精细的关系．第一个重要结果是，Hopf 发现 $H_2(K)/h_2\pi_2(K)$ 是完全由基本群 $\pi_1(K)$ 所决定．

当 $n\geqslant 3$ 时，不存在类似的结果．若当 $2\leqslant i\leqslant n-1$ 时，$\pi_i(K)=0$，则对所有 $r<n$，$H_r(K)$ 被 $\pi_1(K)$ 上的一个群论的构作所完全确定，这里用到了群的同调群，这是 Hopf 和 Eilenberg-MacLane 独立得到的．

Eilenberg-MacLane 在定义群 π 的同调群时，用到 $K(\pi,1)$．对一般的 $n>0$，它的推广是 $K(\pi,n)$，今称为 Eilenberg-MacLane 空间．

稍迟，到了 50 年代初，苏联青年数学家 M. M. Postnikov 将结果推进了一大步．对于空间 X，他找到一个纤维化的序列，使第 n 个纤维化的典型纤维是 Eilenberg-MacLane 空间 $K(\pi_n(X),n)$．他自己称这个序列为自然系列，而今通常称之为 Postnikov 塔．

Postnikov 塔及其不变量已被证明在代数拓扑学的许多方面很有用处，特别是对于阻碍论的推广．

§ 16.1　二维同调群

Hopf 1941 年在［Hop 12］中的重要结果如下．设 K 是一个道路连通局部有限的单纯复形．一般说来，Hurewicz 映射的像 $h_2(\pi_2(K))$ 不是整个 $H_2(K)$，此处系数群为整数群．而 Hopf 发现商群

$$H_2(K)/h_2(\pi_2(K)) \tag{1}$$

只依赖于基本群 $\pi_1(K)$，并且可用一个纯粹代数的构作明显地表达出来．这个代数构作对任意群 G 可以施行．此构作基于将 G 表示为生成元和关系，这就是说，$G=F/R$，其中 F 是一个自由群且 R 是 F 的一个正规子群．Hopf 考虑交换群

$$G_1^* = (R\cap[F,F])/[F,R], \tag{2}$$

其中$[F,F]$为 F 的换位子子群，$[F,R]$是由 F 中元素与 R 中元素的换位子所生成的子群．他证明，首先，群 G_1^* 只依赖于 G 而与特别的表达 F/R 无关；其次，对于 $G=\pi_1(K)$ 存在一个自然同构，将群(1)映成 G_1^*，即

$$H_2(K)/h_2(\pi_2(K))\cong G_1^*. \tag{3}$$

这是一个出人意料的结果，尤其是，导致了代数构作 (2)．

Hopf 还注意到，对于 $n\geqslant 3$，类似的结果并不存在．因为，容易构作 n 维单纯复形 K，具有任意基本群 $\pi_1(K)$ 和任意 $j\geqslant 3$ 维同调群 $H_j(K)$．而当 $\pi_1(K)$ 是一个秩为 p 的自由交换群时，由上面的 Hopf 定理可知，二维 Betti 数必定会 $\geqslant p(p-1)/2$．

§ 16.2　非球面空间与群的同调

非球面空间概念是 Hurewicz 于 1936 年定义的 [Hur 4]. 空间 X 称为非球面的 (aspherical), 如果它是道路连通的, 并且对所有 $q\geqslant 2$ 有$\pi_q(X)=0$. Hurewicz 证明了一个非球面空间的同伦型完全被其基本群 π 所决定. 特别, X 的同调群只依赖于 π. 从而有理由认为这些同调群是 π 的同调群, 记作 $H_*\pi$. 其中 $H_0\pi=\mathbf{Z}$, $H_1\pi=\pi_{ab}$, π_{ab}为 $\pi/[\pi,\pi]$. 但对 $n\geqslant 2$, 从代数上表述 $H_n\pi$ 很不简单. 其中的 $H_2\pi$, 则由 § 16.1 中的 Hopf 定理可知

$$H_2\pi\cong R\cap[F,F]/[R,F]. \tag{4}$$

当然, 也可以定义 π 的给定系数群的同调群和上同调群.

这个课题后来由 B. Eckman, Eilenberg-MacLane, Freudenthal 和 Hopf 自己继续发展, 而在 20 世纪 40 年代中期, 给出了群的同调与上同调的纯代数的定义. 其低维的上同调 H^1, H^2 涉及的概念, 可回溯到 I. Schur [Schur], O. Schreir [Sch 1] 及 R. Brauer [Bra 1] 等人的工作. 关于这方面, 读者可参考 [Bro].

§ 16.3　Eilenberg - MacLane 空间

Eilenberg 和 Mac Lane 于 1945 年 [Ei-M 5] 推广了非球面空间概念. 设空间 X 是道路连通的, 并且对于 $q\neq n$, 有$\pi_q(X)=0$ 及 $\pi_n(X)$ 同构于 π, 则称 X 为一个(π,n)型空间,现称为一个(π,n)型 Eilenberg-MacLane 空间.若限于 CW 复形范畴,则对

于任意 $n\geqslant 1$ 和任意群 π(当 $n\geqslant 2$ 时要求 π 是阿贝尔群),存在一个连通的 CW 复形,它是一个 (π, n) 型的 Eilenberg-MacLane 空间,而且两个这种 CW 复形具有相同的弱同伦型.通常,记一个 (π, n) 型的 CW 复形为 $K(\pi, n)$.

给定系数群 G,则 $K(\pi, n)$ 的同调和上同调记作

$$H_q(\pi, n; G), H^q(\pi, n; G). \tag{5}$$

当 $G=\mathbf{Z}$ 时,则记作 $H_q(\pi, n)$ 和 $H^q(\pi, n)$.

若 X 是一个 $(n-1)$ 连通空间, $\pi=\pi_n(X)$,并且对 $n<i<q$, $\pi_i(X)=0$,则

$$\begin{aligned} &H_i(X)\cong H_i(\pi, n), i<q, \\ &H_q(X)/h_q\pi_q(X)\cong H_q(\pi, n), \end{aligned} \tag{6}$$

其中 h_q 为 Hurewicz 同态.而且 $H^q(X;G)$ 完全被 $\pi, \pi_q=\pi_q(X)$ 及一个上同调类

$$k^{q+1}\in H^{q+1}(\pi;\pi_q) \tag{7}$$

所决定,这个 k^{q+1} 称为 X 的 Eilenberg-MacLane 不变量.

Eilenberg-MacLane 空间的重要性质之一,是对任意交换群 π 和任意 CW 复形 Y,存在一个自然的双射

$$[Y, K(\pi, n)]\to H^n(Y;\pi). \tag{8}$$

这个双射实际是 $[f]\mapsto f^*(\iota)$,其中 $\iota\in \mathrm{Hom}(\pi,\pi)=H^n(K(\pi, n);\pi)$ 是恒等同态.

§ 16.4 Postnikov 塔

设 X 是一个连通的 CW 复形,并设对任意 n 而言,X 是 n 简单,即 $\pi_1(X)$ 是阿贝尔群,并且,它在高维同伦群 $\pi_n(X)$ 上的作用都是平凡的.Postnikov 1951 年的构作如下[Pos 1~5].

先用 J. H. C. Whitehead 的方法,来对任意 $n\geqslant 0$,附贴

$(n+1)$ 维胞腔到 X 上，构作一个相对 CW 复形 (Z, X)，使得

(a) $\pi_{n+1}(Z)=0$；

(b) 若 $i: X\to Z$ 是包含映射，则对 $1\leqslant m\leqslant n$，$i_*: \pi_m(X)\to\pi_m(Z)$是一个同构.这就是构作 Z 以杀去 X 的第 $n+1$ 维同伦群.具体作法是，设映射 $g_\alpha: S^{n+1}\to X$ 的同伦类$[g_\alpha]$生成 $\pi_{n+1}(X)$，利用 g_α 来附贴$(n+2)$维胞腔 e_α^{n+2}.因为，对 $m\leqslant n+1$，$\pi_m(Z,X)=0$，由同伦群正合序列知，当 $m\leqslant n$ 时 i_*是双射，而当 $m=n+1$ 时，i_* 是满射.而按作法，g_α 附贴 e_α^{n+2}，故有 $i_*([g_\alpha])=0$，从而 $\pi_{n+1}(Z)=0$.

重复这个做法便得到一个上升序列

$$Z=Z_1\subset Z_2\subset\cdots\subset Z_{k-1}\subset Z_k\subset\cdots, \tag{9}$$

满足 $\pi_{n+k}(Z_k)=0$，及对 $m<n+k$，有 $\pi_m(Z_k)\cong\pi_m(Z_{k-1})$.然后定义 $Y^n=\bigcup_k Z_k$ 赋以细拓扑(Whitehead 拓扑)，即 Y^n 是$\{Z_k\}$的顺向极限，它满足

(i) $\pi_q(Y^n)=0$ 当 $q>n$；

(ii) 若 j_n 表 $X\xrightarrow{i}Z\to Y^n$ 的复合映射，则对于 $1\leqslant q\leqslant n$，$j_{n*}:\pi_q(X)\to\pi_q(Y^n)$是同构；

(iii) (Y^n,X)是一个无$\leqslant n$ 维胞腔的相对 CW 复形.

其次，我们可以利用阻碍理论，对每个 $n\geqslant 1$，定义连续映射 f_n：$Y^n\to Y^{n-1}$，使图表

$$\begin{array}{ccc} Y^n & \xrightarrow{f_n} & Y^{n-1} \\ {}_{j_n}\nwarrow & & \nearrow_{j_{n-1}} \\ & X & \end{array} \tag{10}$$

交换，且所有这种映射相对于$j_{n-1}(X)$是同伦的.先由于 $j_n(X)$ 和 $j_{n-1}(X)$是自然同胚的，然后从 Y^n 的 $n+1$ 维骨架由低往上考虑延拓.设 q 维骨架上已有延拓，则其阻碍位于

$$H^{q+1}(Y^n, j_n(X); \pi_q(Y^{n-1})).$$

但因当 $q \geqslant n$ 时，$\pi_q(Y^{n-1}) = 0$，故阻碍为 0. 因此可延拓到 $q+1$ 维骨架. 并且类似地由于 $H^q(Y^n, j_n(X); \pi_q(Y^{n-1})) = 0$，可证任意两个这种延拓相对于 $j_n(X)$ 是同伦的. 从而对空间 X，我们已构作出一序列确定到同伦的映射

$$\begin{array}{c} \cdots \to Y^n \xrightarrow{f_n} Y^{n-1} \to \cdots \to Y^1 \xrightarrow{f_1} Y^0 \\ j_n \nwarrow \quad j_{n-1} \uparrow \quad j_1 \nearrow \quad j_0 \nearrow \\ X \end{array} \tag{11}$$

被称作 X 的同伦分解(homotopy resolution)或 Postnikov 塔(Postnikov tower).

对于每个 n，可以定义一个良定的上同调类，它是 Eilenberg-MacLane 不变量的推广，称为 X 的 $n+2$ 维的 Postnikov 不变量：

$$k^{n+2} \in H^{n+2}(Y^n; \pi_{n+1}(X)), \tag{12}$$

使得当空间对（Y^n，X），同伦群 π_{n+1}（X）及不变量 k^{n+2} 知道以后，映射 f_{n+1} 便确定到同伦等价. 这是 Postnikov 在[Pos 5]中仔细证明了的结论.

设给了交换群 Π，一个 CW 复形 Y，和一个上同调类

$$k \in H^{n+2}(Y; \Pi), \tag{13}$$

有一个通用的放大(amplification)过程，为这些数据给出一个关于 Y 同构为良定的纤维化(W, q, Y)，以 $F = K(\Pi, n+1)$ 为纤维. 事实上，Eilenberg-MacLane 空间的基本性质(8)为 k 配置了一个连续映射

$$h: Y \to K(\Pi, n+2), \tag{14}$$

其同伦类是良定的. 用 $P_{x_0}K(\Pi, n+2)$ 表空间 $K(\Pi, n+2)$ 中以 x_0 为起点的道路所组成的空间，$(P_{x_0}K(\Pi, n+2), p, K(\Pi, n+2))$ 是一个纤维化，其中投射 p 为将道路 $\alpha \in P_{x_0}K(\Pi, n+2)$ 映成

$\alpha(1)$，纤维 $F=p^{-1}(x_0)=\Omega(K(\Pi,n+2),x_0)$是以 x_0 为起点的环路空间，由纤维化的同伦群正合序列可知，F 是一个 Eilenberg-MacLane 空间 $K(\Pi,n+1)$. 所谓 k 的放大，是指将以 $K(\Pi,n+2)$为底空间的上述纤维化用 h 拉回为(W,q,Y,F)，它被 Π, Y 和 k 确定到 Y 同构. 据此纤维化的同伦群正合序列可知，对于 $i\neq n+1,n+2$,

$$q_*:\pi_i(W)\to\pi_i(Y) \tag{15}$$

是同构，并且有正合序列

$$0\to\pi_{n+2}(W)\to\pi_{n+2}(Y)\to\Pi\to$$
$$\pi_{n+1}(W)\to\pi_{n+1}(Y)\to 0. \tag{16}$$

此外，对于任意连续映射 $f: Z\to Y$，只要 $h\circ f$ 同伦于常映射，则 f 可以被提升为$g: Z\to W$，使 $f=q\circ g$. 由复叠同伦性质，$h\circ f$ 可以被提升为 $u:Z\to P_{x_0}K(\Pi,n+2)$，使得 $p\circ u=h\circ f$. 因为 $W=\{(y,x)\in Y\times P_{x_0}K(\Pi,n+2):h(y)=p(x)\}$，取 $g:Z\to W$ 为 u 之拉回，即 $g(z)=(f(z),u(z))$，则有 $f=q\circ g$.

回到空间 X 的 Postnikov 不变量 k^{n+2}，取其放大$(W^{n+1}, q_{n+1}, Y^n, F^{n+1})$，其中 $F^{n+1}=K(\pi_{n+1}(X),n+1)$，并取 $f_{n+1}: Y^{n+1}\to Y^n$. 则 $h\circ f_{n+1}: Y^{n+1}\to Y^n\to K(\pi_{n+1}(X),n+2)$同伦于一个常映射，这是可以用阻碍理论，根据 Y^{n+1}和 $K(\pi_{n+1}(X),n+2)$的同伦性质而得到. 因此，由上一段知，f_{n+1}可提升为 $g_{n+1}: Y^{n+1}\to W^{n+1}$，使得 $f_{n+1}=q_{n+1}\circ g_{n+1}$. 由于 $\pi_{n+1}(Y^n)=\pi_{n+2}(Y^n)=0$，从(16)知 $\pi_{n+2}(W^{n+1})=0$ 及 $\pi_{n+1}(W^{n+1})\cong\Pi=\pi_{n+1}(X)\cong\pi_{n+1}(Y^{n+1})$. 连同(15)知 g_{n+1}是一个弱同伦等价，因此 f_{n+1}被 Y^n，$\Pi=\pi_{n+1}(X)$和 k^{n+2}确定到只相差弱同伦等价，在 CW 范畴只相差同伦等价.

第十七章　协边理论

20 世纪 50 年代，代数拓扑学和微分拓扑学的辉煌成就之一，是协边理论的重大突破.

这要回溯到 Poincaré 最初在 1895 年的长论文 Analysis Situs 中打算定义的“同调”概念（参考 §2.1). 在一个给定的 p 维流形 W 中的一个 $q-1$ 维无边子流形，如果它是 W 的一个 q 维子流形的边缘时，则将被忽略. 这个做法的不成功促使 Poincaré 建立单纯同调. 但这个观念仍然未被摒弃，而在 1946 年普林斯顿大学二百年庆祝会上，被 Steenrod 作为未解决的问题重提为 [Ei 7] 中的问题 25 和 26.

问题 25. 对在一个单纯复形 K 中一个 n 维（整系数）同调类 $z_n \in H_n(K)$，是否存在一个有向流形 M 和一个映射 $f: M \to K$，使得 z_n 是 $H_n(M)$的生成元的像?

问题 26. 一个可定向的 n 维流形是一个$(n+1)$维流形的正则边缘的充分必要的代数条件是什么?

事实上，Pontrjagin 在这以前已经引进了带标架的协边概念. 接着，苏联数学家 V. A. Rohlin 得到了协边理论非平凡的两个重要结果：$\Omega_3=0$ 和 $\Omega_4=\mathbf{Z}$.

重要的突破是 Thom 于 1953 年得到的. 他发明了被称为 Thom 空间的新构作，并巧妙地运用了当时代数拓扑学中积攒的武器，基本上决定了无向协边类环 $\mathfrak{N}_*$ 和有向协边类环与有理数域的张量积 $\Omega_* \otimes \mathbf{Q}$.

后来，Thom 的结果被完善，并被推广到其他情形.

§17.1 Pontrjagin 的标架协边

从 1938 年至 1950 年，Pontrjagin 研究复形到球面的连续映射的同伦分类及同伦群的计算. 他在计算 $\pi_{n+k}(S^n)$, $k\geqslant 1$ 时，引用了一个新方法，附加了标架结构的协边概念，即标架流形和标架协边. 设 M^k 是 $\mathbf{R}^{n+k}$ 中的一个光滑流形，它的法丛是平凡丛，则存在 M^k 上 n 个光滑映射 $u_i: M^k\to\mathbf{R}^{n+k}$, $i=1,2,\cdots,n$，使得对于每个点 $x\in M^k$ 而言，$\varphi(x)=\{u_1(x),\cdots,u_n(x)\}$ 构成 M^k 在点 x 的法空间 N_x 中的一个单位正交标架. 则 (M^k,φ) 称为一个标架流形. $\mathbf{R}^{n+k}$ 中两个标架流形 (M_0^k,φ_0) 和 (M_1^k,φ_1) 称为在 $\mathbf{R}^{n+k}$ 中是标架协边的，若存在光滑 $(k+1)$ 维流形 $X\subset\mathbf{R}^{n+k+1}$ 和 X 上的法标架 ψ，使得

$$\begin{aligned}\partial X &= X\cap(\mathbf{R}^{n+k}\times\{0\}\cup\mathbf{R}^{n+k}\times\{1\})\\ &= M_0^k\times\{0\}\cup M_1^k\times\{1\},\end{aligned}$$

且 ∂X 在 X 中有一个领子邻域 $M_0^k\times[0,\varepsilon)\cup M_1^k\times(1-\varepsilon,1]$，使得

$$\psi(x,t)=(\varphi_0(x),0),\text{当}(x,t)\in M_0^k\times[0,\varepsilon),$$

$$\psi(x,t)=(\varphi_1(x),1),\text{当}(x,t)\in M_1^k\times(1-\varepsilon,1].$$

Pontrjagin 在研究连续映射 $f: S^{n+k}\to S^n$ 时，设 f 是光滑的. 由 Sard 定理，光滑映射的非正则值的集合在靶流形中的测度是零，故在 S^n 中存在点 z，是 f 的正则值，从而 $f^{-1}(z)$ 是 S^{n+k} 中，进而可看成 $\mathbf{R}^{n+k}$ 中的 k 维光滑子流形，并具有平凡的法丛. 因而得到一个标架流形. 反之，若给了 $\mathbf{R}^{n+k}$ 中一个标架 k 维流形 M^k，其管状邻域 N 微分同胚于乘积 $M^k\times\mathbf{R}^n$. 记此微分同胚为 h，并记向第二因子的投射 $M^k\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 为 q. 再将合成映射 $q\circ h$:

$N \to \mathbf{R}^n$延拓到N的边缘和其外以及无穷远点使其像为无穷远点，便得到连续映射$f: S^{n+k} \to S^n$，它在N上的限制是一个光滑映射. Pontrjagin 证明，两个光滑映射$f_0, f_1: S^{n+r} \to S^n$是同伦的，当且仅当对$f_0$和$f_1$的公共正则值$z$，$f_0^{-1}(z)$和$f_1^{-1}(z)$作为标架流形在$\mathbf{R}^{n+k}$中是标架协边的.

这使得 Pontrjagin 能够通过计算$\mathbf{R}^{n+k}$中的k维标架协边类，来计算同伦群$\pi_{n+1}(S^n)$和$\pi_{n+2}(S^n)$[Pt 5,10]. 接着于 1951 年，Rohlin 用它计算了$\pi_{n+3}(S^n)$[Ro 2,4,11].

我们并没有看到用这个办法去计算当$k \geqslant 4$时的$\pi_{n+k}(S^n)$，因为当$k \geqslant 4$时，标架协边类的计算太复杂，而此时（1952 年），利用谱序列已使同伦群的计算获得重大突破. 接着出现的是反过来，将协边的计算转化成某个特定空间的同伦群，这就是 Thom 1953 年的贡献. 这个方法论的转变对我们有很大的教益.

现在可以认定，协边概念源于 Poincaré 及其先行者，而 Pontrjagin 关于标架协边的工作则是整个协边理论的开端.

§ 17.2　协边概念和 Rohlin 的结果

Rohlin 除上面利用 Pontrjagin 构造于$k=3$的情形以外，他还给协边概念以“内蕴同调”的称呼. 应当说，这是一个好名称，它符合同调论的缔造者的原意. 但协边一词已被普遍接受，我们仍采用协边.

两个光滑的闭n维流形M_1^n和M_2^n称为无向协边的，或属于同一个无向协边类，如果它们的不交并$M_1^n \sqcup M_2^n$微分同胚于一个光滑的紧$(n+1)$维流形W^{n+1}的边缘∂W^{n+1}. 所有光滑的闭n维流形的无向协边类组成的集合记作$\mathfrak{N}_n$，按流形的不交并为

加法过渡到无向协边类，则 $\mathfrak{N}_n$ 成为一个加法群．记 $\mathfrak{N}_* = \bigoplus_n \mathfrak{N}_n$，它是一个分次加法群．乘积运算 $M_1^m \times M_2^n$ 产生乘积运算 $\mathfrak{N}_m \times \mathfrak{N}_n \to \mathfrak{N}_{m+n}$，而使 $\mathfrak{N}_*$ 成为一个分次交换环．它实际上是一个 $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ 上的代数．

两个光滑的闭有向 n 维流形 M_1^n 和 M_2^n 称为定向协边的，或属于同一个有向协边类，如果不交并 $M_1^n \sqcup (-M_2^n)$ 保向微分同胚于一个光滑的紧的有向的 $(n+1)$ 维流形 W^{n+1} 的带有诱导定向的边缘 ∂W^{n+1}．所有光滑的闭有向 n 维流形的有向协边类组成的集合记作 Ω_n，流形的不交并产生 Ω_n 中加法，使成一个加法群．设 $\Omega_* = \bigoplus_n \Omega_n$，它是一个分次加法群．给乘积 $M_1^m \times M_2^n$ 赋以乘积定向而产生乘积运算 $\Omega_m \times \Omega_n \to \Omega_{m+n}$，使 Ω_* 成为一个分次反交换环．

维数极低的结果是平凡的：$\mathfrak{N}_0 = \mathbf{Z}$，$\Omega_0 = \mathbf{Z}$，$\mathfrak{N}_1 = 0$，$\Omega_1 = 0$，$\mathfrak{N}_2 = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$，$\Omega_2 = 0$．

第一个不平凡的结果由 Rohlin 1951 年在 [Ro 3] 中给出，即 $\Omega_3 = 0$．随后在第二年，他在 [Ro 4] 中给出一个更为不平凡的结果 $\Omega_4 = \mathbf{Z}$．更确切地说，他的定理是：一个光滑的闭有向 4 维流形 M^4 是一个光滑的紧有向 5 维流形的边缘的充要条件是，M^4 的号差 $\sigma(M^4) = 0$．这里号差(signature)系指以有理数 $\mathbf{Q}$ 为系数的 2 维同调群 $H_2(M^4;\mathbf{Q})$（实际是域 $\mathbf{Q}$ 上的有限维向量空间）上的相交二次(双线性)形式 $H_2(M^4;\mathbf{Q}) \times H_2(M^4;\mathbf{Q}) \to \mathbf{Q}$ 的号差，或对偶地，2 维上同调群 $H^2(M^4;\mathbf{Q})$（$\mathbf{Q}$ 上向量空间）中由上积定义的二次(双线性)形式 $H^2(M^4;\mathbf{Q}) \times H^2(M^4;\mathbf{Q}) \to \mathbf{Q}$ 的号差．注意，号差是一个整数，而且 $\sigma(\mathbf{C}P^2) = 1$，$\sigma(\overline{\mathbf{C}P^2}) = -1$．

Rohlin 当时只为这个定理写下了证明的大致步骤和概要．30 多年以后，有人为它补上了详细的证明，不用后来的方法，只用当时的工具，如 P. Melvin 的 [Me]．

Rohlin 还在同一篇文章里，又只用了几行写下了另一个关于 4

维流形的著名定理,称为 Rohlin 号差定理.请读者参见第十八章.

§17.3 协边的不变性

早在 1947 年, Pontrjagin [Pt 9] 便得到了关于 Stiefel-Whitney数的定理：若光滑闭 n 维流形 M^n 是光滑紧$(n+1)$维流形 W^{n+1}之边缘,则 M^n 的所有 Stiefel-Whitney 数均为零.从而 Stiefel-Whitney 数是闭流形的无向协边类的不变量.他还得到关于 Pontrjagin 数的定理:若光滑有向闭 $4k$ 维流形 M^{4k}是光滑有向紧$(4k+1)$维流形 W 的边缘,则 M^{4k}的所有 Pontrjagin 数均为零.从而 Pontrjagin 数是闭流形的有向协边类的不变量.这两个结果在 Thom 的工作[Th 2,3]中两次被引用.

Thom 在 [Th 3] 中，还得到有关号差的定理：若光滑闭有向 $4k$ 流形 M 与 M'有向协边，则$H^{2k}(M;\mathbf{Z})$和 $H^{2k}(M';\mathbf{Z})$上由上积定义的二次形式的号差相等：$\sigma(M)=\sigma(M')$,即号差是有向协边类的不变量. 这推广了 Rohlin 有关 4 维有向流形的结果(参见 §17.2).

§17.4 Thom 横截性定理

设 X, Y 是两个光滑流形并且 f: $X\to Y$ 是一个光滑映射.再设 Z 是 Y 中的子流形，一个使人很感兴趣的问题是，在什么条件下 $f^{-1}(Z)$是 X 的子流形. 它的一个特例我们已经谈及的是，当 Z 是一个单点 z(Y 的 0 维子流形) 时，若 z 是 f 的正则值，则 $f^{-1}(z)$是 X 的子流形.这是 §17.1 中 Pontrjagin 用过的

事实．Thom 将正则性推广到 Z 是 Y 的子流形的情形如下．对于 $x \in f^{-1}(Z)$，我们称 f 在点 x 横截于 Z，若

$$df_x T_x X + T_{f(x)} Z = T_{f(x)} Y. \tag{1}$$

f 称为与 Z 横截，若此条件对所有点 $x \in f^{-1}(Z)$ 成立．

如果 f 与 Z 横截，则 $f^{-1}(Z)$ 是 X 中的子流形，其余维等于 Z 在 Y 中之余维，并且 $f^{-1}(Z)$ 在 X 中的法丛是 Z 在 Y 中法丛由 f 之拉回．这往往是我们想要的结论，它不难从隐函数定理证得．

重要的是，任给光滑映射 f，能否在 f 的近旁找到一个光滑映射 g，使得 g 与 Z 横截？其答案就是下面重要的

Thom 横截性定理　设 $f: X \to Y$ 是光滑映射，Z 是 Y 的光滑子流形，d 是 Y 中定义拓扑的度量．则对于任意 $\epsilon > 0$，存在光滑映射 $g: X \to Y$，使得对任意点 $x \in X$，有 $d(f(x), g(x)) < \epsilon$，并且 g 横截 Z．如果 A 是 X 中闭集使得 f 对于所有点 $x \in A$ 已经与 Z 横截，则可做到使 $g|A = f|A$．

Thom 在 1954 年的［Th 3］中提出了以上概念和定理以及其证明．现今已写入所有的微分拓扑学的教科书中，如［Gu-P］或［HirM 3］．

§ 17.5　Thom 空间

Thom 在 1954 年的［Th 3］中的主要任务，是回答本章前言中介绍的 Steenrod 提出的两个问题．Thom 的重要贡献在于引进向量丛 ξ 的 Thom 空间 $T(\xi)$，将协边问题转化为万有丛的 Thom 空间的同伦群；然后再利用代数拓扑学计算同伦群来求得具体解答．有理由认为，Thom 空间的引进是神来之笔，以至有人说，例如［HirM 3；172 页］，这是一个 deus ex machina（拉丁文：意外解困之神）．

设 $\xi=(E,p,B,\mathbf{R}^k)$是一个实向量丛,并设 ξ 上已有一个黎曼度量,即对每点 $b\in B$,对应的纤维 $F_b=f^{-1}(b)$上有一个内积,而成为欧氏空间;且内积连续依赖于点 b.设 $A\subset E$ 是所有满足 $|v|\geqslant 1$ 的向量 v 所组成的子集.将 A 塌缩成一点而得到的商空间E/A,记作 $T(\xi)$,并称为向量丛 ξ 的 Thom 空间.Thom 主要将用到的是万有有向丛 $\tilde{\gamma}^k$ 和万有丛 γ^k 的 Thom 空间 $T(\tilde{\gamma}^k)$和 $T(\gamma^k)$.当时,Thom 的记号分别是 $MSO(k)$和 $MO(k)$,它们分别对应于群 $SO(k)$和 $O(k)$的分类空间 $BSO(k)$和 $BO(k)$.今后我们称 $T(\tilde{\gamma}^k)$和 $T(\gamma^k)$为万有 Thom 空间.

§ 17.6 映射的同伦与流形的协边

设 f: $S^m\to T(\xi)$是连续映射,其中 ξ 是一个光滑的实向量丛,$\xi=(E,p,B,\mathbf{R}^k)$,其底空间是一个光滑闭流形.记 $T(\xi)$中那个由 A 塌缩而成的点为 t_0,则 $T(\xi)\setminus\{t_0\}$是一个光滑流形.将 B 与它到ξ 中的零截面等置,则可认为 B 是 $T(\xi)\setminus\{t_0\}$中的一个子流形.由 Thom 横截性定理,f 同伦于一个映射$g:S^m\to T(\xi)$使得 g 在$g^{-1}(T(\xi)\setminus\{t_0\})$上是光滑的,并横截于 B.$g^{-1}(B)$是 S^m 中闭$(m-k)$维光滑维子流形.假设 ξ 是有向的,则 $g^{-1}(B)$有一个诱导定向.此外 $g^{-1}(B)$的无向协边类或有向协边类只与 g 的同伦类,即 f 的同伦类有关.这就是说,由此得到一个从同伦群 $\pi_m(T(\xi),t_0)$到 $\mathfrak{N}_{m-k}$或Ω_{m-k}的同态.

若取向量丛 ξ 为万有丛$\tilde{\gamma}^k$ 或 γ^k,则得到主要定理.

Thom 定理 若 $k>n+1$,则有向万有 Thom 空间的同伦群 $\pi_{n+k}(T(\tilde{\gamma}^k),t_0)$典则地同构于有向协边群 Ω_n,而无向万有 Thom 空间的同伦群 $\pi_{n+k}(T(\gamma^k),t_0)$典则地同构于无向协边群 $\mathfrak{N}_n$.

§ 17.7 环 $\mathfrak{N}_*$ 的决定

在［Th 3］中，Thom 完全弄清了 $\mathfrak{N}_*$. 他利用当时刚建立的 Eilenberg-MacLane 空间的理论证明，当维数$<2k$ 时，$T(\gamma^k)$ 与 Eilenberg-MacLane 复形的乘积$K(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z},k)\times K(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z},k+2)\times\cdots\times(K(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z},k+h))^{d(h)}\times\cdots\times(K(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z},2k))^{d(k)}$有相同伦型，其中 $d(h)$是 h 的非二进分解（即不含有 2^m-1 形式的分解）的个数. 于是得

定理 对任意 n，群 $\mathfrak{N}_n$ 同构于$d(n)$个同构于 $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ 的群的直和，其中$d(n)$是 n 的非二进分解的个数.

Thom 还证明了 § 17.3 中 Pontrjagin 定理的逆命题.

定理 若光滑闭流形 M 的所有 Stiefel-Whitney 数均为零，则 M 是某个光滑紧流形之边缘.

进而得到

定理 环 $\mathfrak{N}_*$ 同构于域 $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ 上的一个多项式代数，对应于每个不是形如 2^m-1 的 k，恰有一个生成元.

关于生成元，Thom 只指出当 k 是偶数时，$\mathbf{R}P^k$ 的协边类是生成元，并且他给出了维数$\leqslant 8$ 时的生成元. 后来德国人 A. Dold 于 1956 年，在［Do 1］中构作了其余奇维生成元而完全解决了生成元是什么这一问题.

§ 17.8 环 Ω_* 的决定

Thom 在［Th 3］中只得到 Ω_* 的部分结果. Thom 明确决

定$n\leqslant 7$时：$\Omega_1=\Omega_2=\Omega_3=0$，$\Omega_4=\mathbf{Z}$，$\Omega_5=\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$，$\Omega_6=\Omega_7=0$. 前面已讲过，$\Omega_3$和$\Omega_4$早先已由 Rohlin 确定.

利用 Serre 的$\mathscr{C}$同构［Ser 2］概念，加法群同态f：$A\to B$称为一个$\mathscr{C}$同构，若它的核 $\mathrm{Ker}\, f=f^{-1}(0)$ 及余核 $\mathrm{Coker}\, f=B/f(A)$均为有限群. Thom 证明了，当$r<2k-1$并且$k$和$p$很大时，Hurewicz 同态

$$h:\pi_r(T(\tilde{\gamma}_p^k),t_0)\to H_r(\tilde{G}_k(\mathbf{R}^{k+p});\mathbf{Z})$$

是$\mathscr{C}$同构. 由此可以证得

定理 当$n\neq 0 \pmod 4$时Ω_n是有限的，而当$n=4r$时Ω_n是秩为$p(r)$的有限生成群，其中$p(r)$为r的分解个数.

再利用复射影空间的 Pontrjagin 数的性质，得到

定理 $\Omega_*\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{Q}$同构于$\mathbf{Q}$上的以$\mathbf{C}P^2$，$\mathbf{C}P^4$，$\mathbf{C}P^6$，…为独立生成元的多项式代数.

当$n\geqslant 8$时，Ω_n的挠子群尚待确定，这便成了受到关注的问题了. 1959 年，Milnor［Mi 7］和苏联人 S. Averbuch［Av］独立地得到：Ω_n没有奇挠，有限阶元素的阶为 2 的幂. 紧接着在同年，英国人 C. T. C. Wall 完成了［Wa 1］，完全确定了Ω_*的代数结构. 特别当$n\geqslant 8$时$\Omega_n\neq 0$.

接下来，Milnor［Mi 10］和 Novikov［Nov 1］在 1960 年，将 Thom 的做法推广到以$U(k)$为结构群的情形，并且在 1960 年以后，被推广到其他的典型群. 此处不赘述，读者可参考［Sto］.

§ 17.9 用流形实现同调类

Thom 在［Th 3］中还回答了前言中提到的 Steenrod 提出的问题 25. 现在将问题对整系数和模 2 整系数重述如下. 设K是一个

有限复形. 对于 $z_n \in H_n(K;\mathbf{Z})$，是否存在一个连通的光滑的有向闭 n 维流形 M^n 和一个连续映射 $f: M^n \to K$ 使得 z_n 是 $H_n(M^n;\mathbf{Z})$ 的与定向对应的生成元（称为 M^n 的基本类）在 f_* 之下的像? 若 $z_n \in H_n(K;\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$，是否存在一个连通的光滑闭 n 维流形 M^n 和一个连续映射 $f: M^n \to K$ 使得 z_n 是 $H_n(M^n;\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ 的生成元（M^n 的基本类）在 f_* 之下的像?

他所得结果如下：

(1) 有限多面体的每个模 2 同调类都是某个连通光滑闭流形的基本类的像.

(2) 有限多面体的每个维数 $\leqslant 5$ 的整同调类是某个连通光滑有向闭流形的基本类的像.

(3) 对给定的有限多面体的每一个 p 维整同调类 z，存在一个只与 p 有关的非零整数 N，使得 Nz 是某个连通光滑有向闭流形的基本类的像.

(4) 对任何维数 $r \geqslant 7$，存在有限复形的整同调类，它不是光滑的有向的闭流形的基本类的像.

对于光滑流形而言，问题可进一步对子流形来提. 设 V^n 是一个光滑的 n 维流形，W^p 是 V^n 中的一个光滑的闭 p 维子流形，且包含映射 $i: W^p \to V^n$ 诱导的同态 $i_*: H_p(W^p) \to H_p(V^n)$ 将 W^p 的基本类映成同调类 $z \in H_p(V^n)$，则说 z 可用子流形 W^p 实现. 当 V^n 是有向的，同调群均取整系数，子流形亦取有向的.

Thom 得到下面的结果：

(5) 在光滑的 n 维流形 V^n 中，下列模 2 同调群的类可用光滑闭子流形实现：$H_{n-1}(V^n)$ 对任意 n；$H_{n-2}(V^n)$ 对 $n<6$；$H_{n-3}(V^n)$ 对 $n<8$；$H_i(V^n)$ 对 $i \leqslant \frac{n}{2}$ 及任意 n.

(6) 在可定向光滑的 n 维流形 V^n 中，下列整系数同调群的类可用有向光滑闭子流形实现：$H_{n-1}(V^n)$，$H_{n-2}(V^n)$ 对任意 n；$H_i(V^n)$ 对 $i \leqslant 6$ 及任意 n. 特别，维数 $\leqslant 9$ 的可定向光滑流形中

的所有整系数同调类均可用有向光滑闭子流形实现.

(7) 对可定向 n 维光滑流形 V^n 中的每个整同调类 z, 恒存在一个非零整数 N, 使得 Nz 可用有向光滑子流形实现. 从而可定向 n 维光滑流形 V^n 的实或有理系数同调群, 有一组可被有向光滑子流形实现的元素所组成的基.

第十八章　号差定理

Pontrjagin 曾证明，两个有向协边的流形有相同的 Pontrjagin 数，而 Thom 则证明两个有向协边的流形有相同的号差．实际上，Rohlin 证明 $\Omega_4 = \mathbf{Z}$ 是用的号差．这就自然有理由提出研究号差与 Pontrjagin 数之间的关系．

第一个这种关系是 Rohlin 在 1952 年证明的．这就是

$$\sigma(M^4) = \frac{1}{3} p_1 [M^4]. \tag{1}$$

Hirzebruch 对这个问题进行了深入研究，在建立了乘法序列的存在和唯一性定理基础上，证明了著名的号差定理，这就是有向流形的号差与其 Pontrjagin 数之间的关系．（1）是其中 $k=1$ 的特款．

这个定理有深刻的应用，下一章介绍的怪球面就是其中之一．而且它还是 20 世纪 60 年代建立的 Atiyah-Singer 指标定理的特例．

§ 18.1　Rohlin 的结果

Rohlin 在［Ro 4］中的主要结果之一，就是（1）式（参见 § 12.6）．Hirzebruch 在［Hz 3］中说，（1）式是由吴文俊猜得

的. Rohlin 把这个结果分解为以下引理:

(a) 对每个光滑的有向闭 4 维流形 M^4, 存在一个整数 s, 使得 M^4 与 $s\mathbf{C}P^2$ 有向协边, 其中 sN 表示 s 个 N 的拷贝的连通和.

(b) 如果光滑的有向闭 4 维流形 M^4 与 N^4 有向协边, 则它们的号差相等, 即 $\sigma(M^4)=\sigma(N^4)$.

(c) $\sigma(s\mathbf{C}P^2)=s$.

(d) 若光滑有向闭 4 维流形 M^4 与 N^4 有向协边, 则它们的 Pontrjagin 数相等, 即 $p_1[M^4]=p_1[N^4]$.

(e) $p[s\mathbf{C}P^2]=\langle p_1,[s\mathbf{C}P^2]\rangle=3s$.

其中引理 (d) 和 (e) 是 Pontrjagin 1947 年得到的 [Pt 9]. Rohlin 的主要困难是引理 (a), 再加上容易的 (b) 和 (c), 就得到了 $\Omega_4=\mathbf{Z}$.

§18.2 乘法序列

设 B 是一个有单位元 1 的交换环. 设 $p_0=1$ 并设 p_1, p_2, …为不定元. 记 $\mathfrak{B}=B[p_1,p_2,\cdots]$ 为以 p_1, p_2, …为不定元, 系数在 B 中的多项式环. 设 p_i 的次数为 i, 单项式 $p_{j_1}p_{j_2}\cdots p_{j_r}$ 的次数为 $j_1+j_2+\cdots+j_r$, 则

$$\mathfrak{B}=\bigoplus_{k=0}^{\infty}\mathfrak{B}_k, \tag{2}$$

其中 $\mathfrak{B}_k$ 是每项均为 k 次的多项式组成的加法群, 并且 $\mathfrak{B}_0=B$. 群 $\mathfrak{B}_k$ 是 B 模, 其秩等于 k 之分解数 $d(k)$. 此外

$$\mathfrak{B}_r\mathfrak{B}_s\subset\mathfrak{B}_{r+s}. \tag{3}$$

设 $\{K_j\}$ 是不定元 p_i 的系数在 B 中的多项式的一个序列, 其中 $K_0=1$ 并且 $K_j\in\mathfrak{B}_j$, $j=0, 1, 2, \cdots$. 序列 $\{K_j\}$ 称为一

个乘法序列（multiplicative sequence），如果以 z，p_i，p_i'，p_i'' 为不定元的下述恒等式

$$1+p_1z+p_2z^2+\cdots$$
$$=(1+p_1'z+p_2'z^2+\cdots)(1+p_1''z+p_2''z^2+\cdots) \tag{4}$$

推导出恒等式

$$\sum_{j=0}^{\infty}K_j(p_1,p_2,\cdots,p_j)z^j$$
$$=\sum_{i=0}^{\infty}K_i(p_1',p_2',\cdots,p_i')z^i\sum_{k=0}^{\infty}K_k(p_1'',p_2'',\cdots,p_k'')z^k. \tag{5}$$

简记

$$K\left(\sum_{j=0}^{\infty}p_jz^j\right)=\sum_{j=0}^{\infty}K_j(p_1,p_2,\cdots,p_j)z^j,$$
$$a=\sum_{j=0}^{\infty}p_jz^j,\ a'=\sum_{j=0}^{\infty}p_j'z^j,\ a''=\sum_{j=0}^{\infty}p_j''z^j,$$

则（5）可改写为

$$K(a'a'')=K(a')K(a''). \tag{6}$$

特别，幂级数

$$K(1+z)=\sum_{i=0}^{\infty}b_iz^i \tag{7}$$

称为乘法序列 $\{K_j\}$ 的示性幂级数，这里 $b_0=1$，$b_i=K_i(1,0,\cdots,0)\in B$.

下面的定理利用示性幂级数，给出了所有可能的乘法序列的分类 [Hz 3].

定理（Hirzebruch） 对于每个形式幂级数 $Q(z)=\sum_{i=0}^{\infty}b_iz^i$，其中 $b_0=1, b_i\in B$，存在唯一的乘法序列 $\{K_j\}$，使得以 $Q(z)$ 为其示性幂级数，即满足 $K(1+z)=Q(z)$.

其证明利用了对 $\sum_{i=0}^{\infty}p_iz^i$ 的部分和作形式因式分解

$$1 + p_1 z + p_2 z^2 + \cdots + p_m z^m = \prod_{i=1}^{m}(1 + \beta_i z). \tag{8}$$

这就是说，把 p_1，p_2，…，p_m 看成 β_1，β_2，…，β_m 的初等对称函数. 于是 $\mathfrak{P}$ 是以 β_1，β_2，…，β_m 为不定元，系数在 B 中的所有对称函数所成的环.

§ 18.3 K 亏格

取 B 为有理数域 $\mathbf{Q}$. 给定以有理数为系数的一个乘法序列 $K = \{K_n(x_1, \cdots, x_n)\}$. 设 M^m 是光滑的有向的闭 m 维流形. 定义 M^m 的 K 亏格（K-genus）为

$$K[M^m] = \begin{cases} 0, \text{当 } m \not\equiv 0 (\bmod 4), \\ K_n[M^{4n}] = \langle K_n(p_1, \cdots, p_n), \mu_{4n} \rangle, \text{当 } m = 4n, \end{cases} \tag{9}$$

其中 p_i 为 M^{4n} 的第 i 个 Pontrjagin 类. $K[M^m]$ 是 M^m 的 Pontrjagin 数的一个确定的有理系数线性组合.

由 Pontrjagin 定理，边缘的 K 亏格必为零，又由于 K 是一个乘法序列，可知 K 亏格给出有向协边环 Ω_* 到有理数 $\mathbf{Q}$ 的一个环同态.

§ 18.4 号差定理

回到最熟悉的不变量号差，设 M^m 是光滑的有向的闭 m 维流形. 定义 M^m 的号差（signature）$\sigma(M^m)$ 为零，若 $m \not\equiv 0$ (mod

4)；为 $H^{2n}(M^{4n};\mathbf{Z})$上由上积定义的二次形式的号差，若 $m=4n$. 由于 $\sigma(M+M')=\sigma(M)+\sigma(M')$，$\sigma(M\times M')=\sigma(M)\cdot\sigma(M')$，以及若 M 是边缘，则 $\sigma(M)=0$(Thom 定理)，可知号差 σ 给出了有向协边环 Ω_* 到整数环 $\mathbf{Z}$ 的一个同态.

Hirzebruch 证明了下面重要的号差定理［Hz 3］，它把流形的号差表为 Pontrjagin 数的有理系数线性组合.

号差定理 设 $L=\{L_k(p_1,\cdots,p_k)\}$是一个乘法序列，其示性幂级数为

$$\sqrt{t}/\tanh\sqrt{t}=1+\frac{1}{3}t-\frac{1}{45}t^2+\cdots+(-1)^{k-1}2^{2k}B_kt^k/(2k)!\ +\cdots \quad (10)$$

则光滑有向闭流形 M^{4k}的号差$\sigma(M^{4k})$等于 L 亏格$L[M^{4k}]$.

式（10）中的 B_k 是第k 个 Bernoulli 数，其中

$$B_1=1/6,\ B_2=1/30,\ B_3=1/42,\ \cdots$$

头几个 L_k 是

$$L_1=\frac{1}{3}p_1,$$

$$L_2=\frac{1}{45}(7p_2-p_1^2),$$

$$L_3=\frac{1}{945}(62p_3-13p_2p_1+2p_1^3),$$

$$L_4=\frac{1}{14\ 175}(381p_4-71p_3p_1-19p_2^2+22p_2p_1^2-3p_1^4).$$

因此号差定理告诉我们

$$\sigma(M^4)=\frac{1}{3}p_1[M^4],$$

$$\sigma(M^8)=\frac{1}{45}(7p_2-p_1^2)[M^8],$$

$$\sigma(M^{12})=\frac{1}{945}(62p_3-13p_2p_1+2p_1^3)[M^{12}],\cdots$$

Hirzebruch 在［Hz 3］中谈到，公式$\sigma(M^4)$是吴文俊猜测的，我们在本章前言中已提到 Rohlin 在［Ro 4］中得到公式$\sigma(M^4)$，

而 Thom 在［Th 3］中证明了公式$\sigma(M^4)$和 $\sigma(M^8)$.

还应特别注意，Hirzebruch 的号差定理是大约十年后证明的 Atiyah-Singer 指标定理［At-S］的特例．只要在 Atiyah-Singer 指标定理中取偏微分算子为 Hodge 算子 D^+，定理便特殊化为号差定理．读者可参考［At-S 2］或［Sh］.

第十九章 怪球面和有关微分结构的研究

20 世纪 50 年代，数学中最出人意料的成就非 Milnor 的怪球面莫属，这是 1956 年震惊全球的大事．他发现一个 7 维微分流形，它拓扑同胚于通常的 7 维球面 S^7，但并不微分同胚于带上通常微分结构的 7 维球面 S^7，于是称它为怪球面．

这项重大突破是基于当时拓扑学的最新的深刻成就，包括示性类理论，协边理论和号差定理．但从否定的角度来探讨这个问题，可能是绝无仅有，这的确难能可贵．从此流形的研究开展了新的局面．微分拓扑学一词大抵是从这以后正式提出来的．

Milnor 进而计算球面上究竟有多少不同的微分结构．他与 M. Kervaire 为此采用称为换球术的技术．这个技术加上 Morse 理论使得 S. Smale 解决了高维广义 Poincaré 猜测，所产生的鼓舞和方法上的结合，引起了 20 世纪 60 年代流形拓扑学的高潮．其中有些事情将另章介绍．

怪球面之后，不存在光滑结构的可剖分流形也被找到，不存在剖分结构的拓扑流形也被找到．

§ 19.1 怪球面的构作

Milnor 1956 年 [Mi 4] 构作的怪球面如下. 考虑以 4 维球面 S^4 为底空间, 以 3 维球面 S^3 为纤维型, 以 $SO(4)$ 为结构群的纤维丛. 这种丛的等价类一一对应于 $\pi_3(SO(4))$ 中元素, 而 $\pi_3(SO(4)) \cong \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ (参考 [Ste 8]). 对于 $(h, j) \in \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$, 设 $f_{hj}: S^3 \to SO(4)$ 定义为 $f_{hj}(u) \cdot v = u^h v u^j$, 其中 $v \in \mathbf{R}^4$, 等式右端的乘法是四元数 $\mathbf{H}$ 中的. 取 $D^4 \times S^3$ 的两个拷贝, $D_+^4 \times S^3$ 和 $D_-^4 \times S^3$, 定义映射 $\phi_{hj}: \partial(D_+^4 \times S^3) = S^3 \times S^3 \to \partial(D_-^4 \times S^3) = S^3 \times S^3$ 为 $\phi_{hj}(u, v) = (u^{-1}, f_{hj}(u) \cdot v)$. 令

$$E_{hj} = (D_+^4 \times S^3) \bigcup_{\phi_{hj}} (D_-^4 \times S^3), \tag{1}$$

它是一个光滑的 7 维流形, 也是一个以 4 维球面 S^4 为底空间以 3 维球面 S^3 为纤维型以 $SO(4)$ 为结构群的光滑纤维丛的全空间, 记这个球面丛为 ξ_{hj}, 它对应于 f_{hj} 的同伦类 $(f_{hj}) \in \pi_3(SO(4))$.

设 k 是一个奇整数, 取 $h = \frac{1}{2}(k+1), j = \frac{1}{2}(1-k)$. 令 $M_k^7 = E_{hj}$. 则得主要定理如下:

定理 设 $k^2 \not\equiv 1 \pmod 7$, 则流形 M_k^7 同胚于 S^7 但是并不微分同胚于 S^7.

§ 19.2 怪球面同胚于 S^7

首先证明 M_k^7 同胚于 S^7. 这要用到刻划一个光滑闭流形同

胚于拓扑球面的 G. Reeb 定理 [Re]，证明可见于 [Mi 14].

定理 如果光滑闭流形 M^n 上存在光滑实函数 f: $M^n \to \mathbf{R}$，它恰有两个临界点且均为非退化的. 则 M^n 同胚于 S^n.

重新表示 M_k^7 之构作如下，取 $\mathbf{R}^4 \times S^3$ 的两个拷贝，将两者的$(\mathbf{R}^4 \setminus \{0\}) \times S^3$ 部分用微分同胚

$$(u, v) \mapsto (u / \| u \|^2, u^h v u^j / \| u \|) \tag{2}$$

等置后，便得 M_k^7 的微分结构. 然后定义 f: $M_k^7 \to \mathbf{R}$ 为

$$f(x) = \Re(v) / (1 + \| u \|^2)^{\frac{1}{2}}, \tag{3}$$

其中 x 为 (u, v) 之像，$\Re(v)$为 v 作为四元数的实部. f 正好有两个临界点$(u, v) = (0, \pm 1)$，且非退化. 由 Reeb 定理知 M_k^7 同胚于 S^7.

§ 19.3 怪球面不微分同胚于 S^7

这是一段很深刻的论证，它的最后结论是 § 19.1 定理中的 M_k^7 不微分同胚于 S^7.

Milnor 为每个满足条件

$$H^3(M^7; \mathbf{Z}) = H^4(M^7; \mathbf{Z}) = 0 \tag{4}$$

的光滑的有向闭 7 维流形 M^7 定义了一个不变量$\lambda(M^7) \in \mathbf{Z}/7\mathbf{Z}$. 因为 Thom 已证得[Th 3]$\Omega_7 = 0$，$M^7$ 是某个光滑的有向紧有边的 8 维流形 B^8 的边缘：$M^7 = \partial B^8$. 设 $\mu \in H_7$ (M^7; $\mathbf{Z}$) 是对应于 M^7 的定向的基本类，$\nu \in H_8(B^8, M^7; \mathbf{Z})$是对应于 B^8 的定向的类，则有关系$\partial \nu = \mu$. 记$H^4(B^8, M^7; \mathbf{Q})$按上积所定义二次形式的号差为 $\sigma(B^8)$. 设 $p_1 \in H^4(B^8; \mathbf{Z})$为 B^8 的第一个 Pontrjagin 类. 条件 (4) 保证由包含所诱导的同态

$$i^*: H^4(B^8, M^7; \mathbf{Z}) \to H^4(B^8; \mathbf{Z}) \tag{5}$$

是同构．令

$$q(B^8)=\langle((i^{*^{-1}}p_1)^2,\nu\rangle, \tag{6}$$

Milnor 运用 Hirzebruch 的号差定理证明了

$$2q(B^8)-\sigma(B^8) \bmod 7$$

与 B^8 的选取无关．于是他定义

$$\lambda(M^7)=2q(B^8)-\sigma(B^8) \bmod 7 \in \mathbf{Z}/7\mathbf{Z}. \tag{7}$$

此外，令 ι 是$H^4(S^4;\mathbf{Z})$的标准生成元，则可算出球面丛 ξ_{hj} 的 Pontrjagin 类是

$$p_1(\xi_{hj})=\pm 2(h-j)\iota=\pm 2k\iota . \tag{8}$$

取光滑 4 维胞腔丛 ρ_k： $B_k^8 \to S^4$ 是 ξ_{hj}的投射 π： $M_k^7 \to S^4$ 的映射柱．其全空间 B_k^8 是一个以 M_k^7 为边缘的光滑流形．因为 ρ_k 是一个同伦等价，上同调群$H^4(B_k^8;\mathbf{Z})$由元素 $\alpha=\rho_k^*(\iota)$生成．选取 B_k^8 与M_k^7 的定向，使$\langle((i^{*^{-1}}\alpha)^2,\nu\rangle=1$．从而 $\sigma(B_k^8)=1$．又 B_k^8 的切丛 $T(B_k^8)$可分解为 $\rho_k^*(T(S^4))$和与 $\rho_k^*(\xi_{hj})$相配的 4 维向量丛之 Whitney 和，由此可知 $p_1(B_k^8)=\rho_k^*(p_1(\xi_{hj}))=\pm 2k\alpha$．从而 $q(B_k^8)=\langle((i^{*^{-1}}(\pm 2k\alpha))^2,\ \nu\rangle=4k^2$；并且 $2q-\sigma=8k^2-1 \equiv k^2-1 \pmod 7$．即得

$$\lambda(M_k^7)=k^2-1 \pmod 7. \tag{9}$$

前面已设$k^2 \not\equiv 1 \pmod 7$，故 $\lambda(M_k^7)\neq 0 \pmod 7$．可见 M_k^7 不微分同胚于 S^7，因为$\lambda(S^7)=0 \pmod 7$．

以上就是 Milnor 在［Mi 4］中的作法和论证．

§ 19.4　进一步发展简介

接下来一个有趣的结果，是 Kervaire 在 1960 年发表的文章［Ke 2］中构作了一个 10 维三角剖分的组合流形，它上面不允许

任何光滑结构. Milnor 在［Mi-S］中有更好的结果. 他利用 Thom 在［Th 4］中定义的组合 Pontrjagin 类，并运用 Hirzebruch 的号差定理，构作了一个 8 维三角剖分的组合流形，它上面不允许任何光滑结构，并且从它上面去掉一个特定的三角剖分的 8 维圆盘后，得到的带边流形却是光滑的，且其边缘是一个 7 维怪球面. 这个例子一箭双雕，既得到了不可光滑化的组合流形而且维数为 8，同时得到 7 维怪球面. 有必要指出的是，［Mi-S］原是 Milnor 于 1957 年春天在普林斯顿大学讲授示性类的讲义 "Lectures on characteristic classes（Notes by James Stasheff），Princeton University，Spring 1957"，经整理后于 1974 年出版. 我们未能得到当时该讲义的油印稿，而得到的 1957 年讲义的俄文译本，是由苏联杂志 Математика 分两部分发表为（1959）3～53 和（1965）3～40，其中后一部分就有这个例子，与［Mi-S］的内容一样. 这说明该例子已于 1957 年春天公布.

1962 年 J. Stallings 在［St 1］中证明了，当 $n \neq 4$ 时 n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 上只有唯一的光滑结构. 这个结果似乎理所当然，因为 $\mathbf{R}^n$ 的代数结构和拓扑结构都是最简单的. 但是为什么 $n \neq 4$? 因为所用方法对 4 维失效！人们盼望会找到一个新的证明，对 4 维也有效.

Milnor 和 Kervaire 于 1963 年发表了文章［Ke-M］，其中运用了 Milnor 在［Mi 11］中新介绍的换球术（surgery）技术，来对同伦等价于球面的光滑闭流形分类. 对 5 维以上，可以得到完全分类. 这里的分类起初是按 h 协边. 两个光滑的有向的闭流形 V_1 和 V_2 称为 h 协边的，若存在一个光滑的有向的紧带边流形 W，其边缘 ∂W 由 V_1 和 $-V_2$ 的不交并组成，并使得 V_1 和 V_2 均为 W 的形变收缩核. 按 Smale 的 h 协边定理，可知 5 维以上光滑的同伦 n 维球面之间的 h 协边等于微分同胚，而且每个 5 维以上的同伦 n 维球面均同胚于 S^n（均请参看 § 20.2）. 从而得到 5 维以上的 n 维球面 S^n 上所有的光滑结构的微分同胚

类. 这些类按连通和成为一个加法群. 文章的主要结论是，该群是有限的，并列举了直到 $n=18$ 为止各群之阶，还说细节在第二篇中. 但原来他们打算写的第二篇文章一直未见发表. 后来 J. P. Levine 在 1983 年出版的文集 Algebraic and Geometric Topology, LNM 1126, Springer 中，发表了 [Lev]. 他称，其内容相当于原来 Milnor 和 Kervaire 计划的. Milnor 和 Kervaire 的文章带动了换球术的广泛应用和深入发展，关于此，第二十二章还将专题介绍.

到了 80 年代，4 维流形的研究有了出乎预料的进展，美国人 M. Freedman [Fr 1] 运用 Casson 环柄证明了单连通 4 维拓扑流形分类定理，其中包括了 4 维广义 Poincaré 猜测的肯定答案；英国人 S. K. Donaldson [Don 1] 应用规范理论，得知正定的光滑 4 维流形是很特殊的；在此基础上可知 $\mathbf{R}^4$ 上光滑结构不惟一，进而得知 $\mathbf{R}^4$ 上存在不可数多个互不微分同胚的光滑结构，同时存在 4 维闭拓扑流形其上不存在任何光滑结构. 关于此，读者可参考第二十六章中有关内容.

第二十章 Morse 理论的新应用

20 世纪 20 年代建立起来的 Morse 理论，在 20 世纪 50 年代得到深人的应用．这首先归功于 R．Bott．

Bott 从确定流形的环路空间的同调群开始，应用了 Morse 理论和 Leray 的谱序列技术，得到测地线均为闭的流形的重要性质．他应用 Morse 理论最引人注目的成果，是有关 Lie 群同伦群的 Bott 周期性定理．

Smale 曾从 Bott 学习 Morse 理论，然后将这个理论与动力系统相结合，并且运用这个理论所建立起的环柄体技术，将光滑流形分解，其中运用了 Whitney 绝招，得到所谓 h 协边定理．作为推论，得到 5 维以上的广义 Poincaré 猜测的肯定解答．

以上两项辉煌成就分别被 Milnor 写进两本小册子 [Mi 14] 和 [Mi 16]．这两本书写得非常好，我们后面常常要引用．

§ 20.1 Bott 周期性定理

Bott 原是一位电气工程师，他从电路网络的研究到 de Rham 理论的应用，对拓扑学开始有兴趣而改行研究数学．他于 1949 年来到普林斯顿高等研究所，向 Morse 学习了 Morse 理论，并在他去密执安大学后，影响了 Smale．当 1955 年 Bott 再次来到普

林斯顿时，他认识到 Morse 理论在 Lie 群的拓扑学中有漂亮的应用. 现在我们按 [Mi 14] 的说法，来介绍 Bott 的主要贡献 [Bot 3，4].

设 M 是完备的黎曼流形，p，$q\in M$ 是沿任一测地线互不共轭的点. $\Omega^*(M;p,q)$是 M 中所有从 p 到 q 的连续道路 ω: $[0,1]\to M$ 所组成的具有紧开拓扑的空间. $\Omega(M;p,q)$是 M 中所有从 p 到 q 的分段光滑的道路所组成的空间，i: $\Omega\to\Omega^*$ 是包含映射. 则 i 是一个同伦等价. Morse 理论的基本定理说，$\Omega(M;p,q)$，从而 $\Omega^*(M;p,q)$也具有一个可数 CW 复形的同伦型，后者对应于从 p 到 q 的每条指数为 λ 的测地线，有一个 λ 维胞腔. 此定理对环路空间$\Omega(M;p)$也成立.

Bott 则得到定理 [Bot 3]：设 G 是一个紧单连通 Lie 群. 则环路空间$\Omega(G)$具有 CW 复形的同伦型，这个 CW 复形没有奇维胞腔，对于每个偶数 λ，只有有限个 λ 维胞腔. 由此知对于奇数 j，$H_j(\Omega(G))=0$；对于偶数 j，$H_j(\Omega(G))$是有限秩的自由 $\mathbf{Z}$ 模.

设 M 是完备的黎曼流形，p，$q\in M$ 的距离为$\rho(p,q)=\sqrt{d}$. 用 $\Omega^d=\Omega^d(M;p,q)$表示从 p 到 q 的所有极小测地线组成的$\Omega=\Omega(M;p,q)$的子空间. 则可以证明：若空间 Ω^d 是一个拓扑流形，并且从 p 到 q 的任何非极小测地线的指数都大于或等于λ_0，则对于 $0\leqslant i<\lambda_0$，相对同伦群$\pi_i(\Omega,\Omega^d)=0$. 由此推出，包含映射诱导的同态 $\pi_i(\Omega^d)\to\pi_i(\Omega)$当 $i\leqslant\lambda_0-2$ 时是同构. 但是 $\pi_i(\Omega)=\pi_{i+1}(M)$. 故当 $i\leqslant\lambda_0-2$ 时，$\pi_i(\Omega^d)\cong\pi_{i+1}(M)$.

考虑特殊酉群 $\mathbf{SU}(2m)$. 可以证明 $\mathbf{SU}(2m)$中从 I 到 $-I$ 的极小测地线组成的空间同胚于复 Grassmann 流形 $G_m(\mathbf{C}^{2m})$，即由 $\mathbf{C}^{2m}$中所有复 m 维向量子空间组成的空间. 此外，$\mathbf{SU}(2m)$中从 I 到 $-I$ 的任何非极小测地线的指数都大于或等于 $2m+2$. 与上面一段结合便得，包含映射 $G_m(\mathbf{C}^{2m})\to\Omega(\mathbf{SU}(2m);\ I,\ -I)$

诱导出维数$\leqslant 2m$ 的各同伦群的同构，从而当 $i\leqslant 2m$ 时，有

$$\pi_i G_m(\mathbf{C}^{2m})\cong\pi_{i+1}\mathbf{SU}(2m). \tag{1}$$

而由纤维化

$$\mathbf{U}(m)\to\mathbf{U}(m+1)\to S^{2m+1}$$

的正合同伦序列

$$\cdots\to\pi_i S^{2m+1}\to\pi_{i-1}\mathbf{U}(m)\to\pi_{i-1}\mathbf{U}(m+1)$$
$$\to\pi_{i-1}S^{2m+1}\to\cdots \tag{2}$$

知

$$\pi_{i-1}\mathbf{U}(m)\cong\pi_{i-1}\mathbf{U}(m+1)\quad 当\ i\leqslant 2m.$$

由此可得，对所有 $i\leqslant 2m$，包含映射诱导的同态

$$\pi_{i-1}\mathbf{U}(m)\to\pi_{i-1}\mathbf{U}(m+1)\to\pi_{i-1}\mathbf{U}(m+2)\to\cdots \tag{3}$$

都是同构．这些相互同构的群称为酉群的第 $i-1$ 个稳定同伦群(stable homotopy group)．它们以后简记为 $\pi_{i-1}\mathbf{U}$．

此外，在（2）中取 $i=2m+1$ 时，得满射

$$\pi_{2m}\mathbf{U}(m)\to\pi_{2m}\mathbf{U}(m+1)\cong\pi_{2m}\mathbf{U}. \tag{4}$$

复 Stiefel 流形 $V_m(\mathbf{C}^{2m})$定义为陪集空间 $\mathbf{U}(2m)/\mathbf{U}(m)$．由纤维化

$$\mathbf{U}(m)\to\mathbf{U}(2m)\to\mathbf{U}(2m)/\mathbf{U}(m)$$

的正合同伦序列可知，当 $i\leqslant 2m$ 时，$\pi_i(\mathbf{U}(2m)/\mathbf{U}(m))=0$．

复 Grassmann 流形 $G_m(\mathbf{C}^{2m})$可以认为是陪集空间 $\mathbf{U}(2m)/\mathbf{U}(m)\times\mathbf{U}(m)$．由纤维化

$$\mathbf{U}(m)\to\mathbf{U}(2m)/\mathbf{U}(m)\to G_m(\mathbf{C}^{2m})$$

的正合同伦序列得知，当 $i\leqslant 2m$ 时，联系同态是同构：

$$\pi_i G_m(\mathbf{C}^{2m})\underset{\to}{\cong}\pi_{i-1}\mathbf{U}(m). \tag{5}$$

再由纤维化

$$\mathbf{SU}(m)\to\mathbf{U}(m)\to S^1$$

的正合同伦序列可见，$j\neq 1$ 时，

$$\pi_j\mathbf{SU}(m)\cong\pi_j\mathbf{U}(m). \tag{6}$$

综合以上，便得当$1\leqslant i\leqslant 2m$，有

$$\pi_{i-1}\mathbf{U}=\pi_{i-1}\mathbf{U}(m)\cong\pi_i G_m(\mathbf{C}^{2m})$$
$$\cong\pi_{i+1}\mathbf{SU}(2m)\cong\pi_{i+1}\mathbf{U}(2m)\cong\pi_{i+1}\mathbf{U}. \tag{7}$$

由于$\mathbf{U}(1)$是一个圆周，它是一个$K(\mathbf{Z},1)$，故$\pi_0\mathbf{U}=\pi_0\mathbf{U}(1)=0$，$\pi_1\mathbf{U}=\pi_1\mathbf{U}(1)\cong\mathbf{Z}$；$\mathbf{SU}(2)$是一个三维球面，故$\pi_2\mathbf{U}=\pi_2\mathbf{SU}(2)=0$，$\pi_3\mathbf{U}=\pi_3\mathbf{SU}(2)\cong\mathbf{Z}$．从而推得

Bott关于酉群的周期性定理　酉群的稳定同伦群有周期2．事实上，群

$$\pi_0\mathbf{U}\cong\pi_2\mathbf{U}\cong\pi_4\mathbf{U}\cong\cdots \tag{8}$$

是零群，而群

$$\pi_1\mathbf{U}\cong\pi_3\mathbf{U}\cong\pi_5\mathbf{U}\cong\cdots \tag{9}$$

是无限循环群．

Bott进而研究了正交群和辛群的周期．记无限正交群为$\mathbf{O}$，并记无限辛群为$\mathbf{Sp}$．则有如下的

Bott关于正交群和辛群的周期性定理　正交群和辛群的稳定同伦群有关系

$$\pi_k(\mathbf{O})\cong\pi_{k+4}(\mathbf{Sp}),$$
$$\pi_k(\mathbf{Sp})\cong\pi_{k+4}(\mathbf{O}),$$

从而

$$\pi_k(\mathbf{O})\cong\pi_{k+8}(\mathbf{O}),$$
$$\pi_k(\mathbf{Sp})\cong\pi_{k+8}(\mathbf{Sp}).$$

进而

$$\pi_k\mathbf{O}\cong\mathbf{Z}/2\mathbf{Z},\ \mathbf{Z}/2\mathbf{Z},\ 0,\ \mathbf{Z},\ 0,\ 0,\ 0,\ \mathbf{Z} \tag{10}$$

对$k\equiv 0,1,\cdots,7 \bmod 8$，

$$\pi_k\mathbf{Sp}\cong 0,\ 0,\ 0,\ \mathbf{Z},\ \mathbf{Z}/2\mathbf{Z},\ \mathbf{Z}/2\mathbf{Z},\ 0,\ \mathbf{Z} \tag{11}$$

对$k\equiv 0,1,\cdots,7 \bmod 8$．

此外，他还得到

$$\pi_k(\mathbf{Sp}/\mathbf{U})\cong\pi_{k+1}\mathbf{Sp},$$
$$\pi_k(\mathbf{U}/\mathbf{O})\cong\pi_{k+2}\mathbf{Sp},$$

$\pi_k(\mathbf{O/U})\cong\pi_{k+1}\mathbf{O}$,

$\pi_k(\mathbf{U/Sp})\cong\pi_{k+2}\mathbf{O}$.

读者应当体会到，上面省略掉的证明都是很难的，有心去钻研的人可直接细心阅读［Mi 14］.

Bott 的周期性定理立即吸引了拓扑学家的注意，并成为 K 理论的核心. 人们接着寻找不用 Morse 理论的证明. J. C. Moore 设计了这样的证明，详见于 H. Cartan 讨论班［CH 5］.

§20.2 广义 Poincaré 猜测的解决和 h 协边定理

Smale 在密执安大学的博士论文［Sm 1］研究浸入，并且还得到著名的球面翻面定理［Sm 2］他同时从 Bott 学习到 Morse 理论. 1958 年后，Smale 的兴趣主要转移到动力系统. 1960 年他应邀赴巴西做研究，在里约海滩上萌发了新的念头，他应用 Morse 理论证明了 5 维以上的广义 Poincaré 猜测［Sm 3］：设 M^n 是光滑的单连通的闭 n 维流形具有 n 维球面 S^n 的整同调群，$n\geqslant5$，则 M^n 同胚于 S^n. 这是一个惊人的成就. 因为在对 Poincaré 猜测（3 维的）进行了半个多世纪的冲击后，曾经几次被宣布已证明甚至已发表，而随后得知仍悬而未决的情势下，这个猜测的高维推广居然在 5 维以上被一举证明，这不能不令人震惊. 难怪 Smale 在最初获得结论而尚未将证明写得足够清楚时，便于 1960 年 6 月赴欧洲去讲演，在波恩和苏黎士受到听众的诘难. 当然 1961 年发表的那篇文章［Sm 3］是 1960 年 10 月收到的，已经有了完善的证明，今简要介绍其思路于下.

我们在 §10.5 中，已经介绍了 Morse 函数的定义. 设给定了一个微分流形，其上的分析学便给定了，它受到流形拓扑结构的限制. 反之，微分流形上有一种特殊的光滑函数，称为 Morse

函数，它的所有临界点都在内部，且均为非退化的．通过任何一个 Morse 函数，可以了解该微分流形的拓扑结构，这是应用 Morse 理论于流形拓扑学的基本信念．

设 M^n 是一个光滑流形，M^n 在点 p 处的切空间记为 T_pM^n．设 f 是定义在 M^n 上的一个实值 C^∞ 函数．点 p 称为 f 的一个临界点，如果导射 df：$T_pM^n \to T_{f(p)}\mathbf{R}$ 是零映射，即在点 p 的邻域 U 的局部坐标系 $(x_1, \cdots, x_n)$ 之下 $\frac{\partial f}{\partial x_1}(p) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) = 0$．$f(p)$ 称为 f 的一个临界值．临界点称为非退化的，若 Hessian 矩阵 $H(f)(p) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p)\right)$ 是非奇异的．非退化性不依赖于临界点 p 的局部坐标系的选取．函数 f 若只有非退化的临界点，则称为一个 Morse 函数．一个基本重要的事实是

Morse 引理　设点 p 是 f 的一个非退化临界点．则存在点 p 的一个邻域 U 和其中的局部坐标系 $(y_1, \cdots, y_n)$，使得对一切 i 有 $y_i(p) = 0$，并且在整个邻域 U 中有恒等式

$$f = f(p) - (y_1)^2 - \cdots - (-y_\lambda)^2 + (y_{\lambda+1})^2 + \cdots + (y_n)^2, \qquad (12)$$

其中 λ 称为 f 在点 p 处的指数．

命 $M^a = f^{-1}(-\infty, a] = \{p \in M^n; f(p) \leqslant a\}$．在 Morse 引理的条件下，记 $c = f(p)$．则存在 $\epsilon > 0$，使得 $f^{-1}[c-\epsilon, c+\epsilon]$ 是紧的，并且除了点 p 外不含有 f 的其他临界点．当 ϵ 充分小时，$M^{c+\epsilon}$ 的伦型与 $M^{c-\epsilon}$ 粘上一个 λ 维胞腔的伦型相同．实际上，还可证明，$M^{c+\epsilon}$ 是由 $M^{c-\epsilon}$ 利用一个由 f 决定的特征映射 φ：$\partial D^\lambda \times D^{n-\lambda} \to M^{c-\epsilon}$ 粘上一个 λ 维环柄 $D^\lambda \times D^{n-\lambda}$ 而成．由此可得流形 M^n 的一个环柄体分割．

由上面的结论可以看出，若光滑闭流形 M^n 上存在 Morse 函数，只有一个极大点和一个极小点而别无其他临界点，则 M^n 是两个 n 维圆盘之并，因而同胚于 S^n．这是 G. Reeb 在 40 年代 [Re] 就得到的结果．

Smale 在［Sm 3］中做到的是，在假设流形 M^n 单连通并与 S^n 具有相同的整同调群且 $n\geqslant5$ 的条件下，可以逐步简化环柄体分割，而使对应的 Morse 函数的临界点个数减少. 最后，可得 M^n 上的一个 Morse 函数，只有两个临界点，一个极大点和一个极小点，而使在 $n\geqslant5$ 时的广义 Poincaré 猜测得到了证明.

接着，Smale 于 1961 年在［Sm 4］中证明了现在所称的 h 协边定理. 设 W 是一个光滑的紧的带边流形，其边缘 ∂W 由两个不相交的流形 V_1 和 V_2 组成，使得 V_1 和 V_2 均为 W 的形变收缩核，则称三元组（W；V_1，V_2）是一个 h 协边（h-cobordism），这时 V_1 和 V_2 称为是互相 h 协边的（h-cobordant）. Smale 的定理说，设 M_1^n 和 M_2^n 是两个光滑的闭的单连通的有向的互相 h 协边的 n 维流形，（W^{n+1}；M_1^n，M_2^n）是一个 h 协边，$n\geqslant5$，则 W^{n+1} 微分同胚于 $M_1^n\times I$，从而 M_1^n 和 M_2^n 是可保向微分同胚的.

事实上，5 维以上广义 Poincaré 猜测可作为 h 协边定理的推论而导出. Milnor 于 1963 年秋季在普林斯顿大学系统地讲解了 h 协边定理，形成了著名的讲义［Mi 16］. 我们现在按其中的讲法简介如下.

利用 W^{n+1} 上的一个 Morse 函数（临界点均为 W^{n+1} 的内点且均为非退化），从 Morse 引理可得 W^{n+1} 的一个环柄体分解，记作

$$W^{n+1}=M_1^n\times I\cup H_1\cup\cdots\cup H_k,$$

其中第 i 个 H_i 是用一个光滑嵌入 φ_i：$\partial D^{p_i}\times D^{n-p_i+1}\to\partial(M_1^n\times I\cup H_1\cup\cdots\cup H_{i-1})$ 附贴一个 p_i 环柄 $D^{p_i}\times D^{n-p_i+1}$ 而得.

两个协边（W；M_1，M_2）和（W'；M_1'，M_2'）称为等价的，如果存在一个微分同胚 f：$W\to W'$ 使得 $f|M_i$：$M_i\to M_i'$，$i=1$，2，都是微分同胚，这时记作 $W\approx W'$.

h 协边定理的证明用到以下原理：

原理 1（重新排序） 若$W' = W \cup H^{(r)} \cup H^{(s)}$，其中$H^{(p)}$表示附贴了 p 环柄，且 $s \leqslant r$，则 $W' \approx W \cup H^{(s)} \cup H^{(r)}$，且$H^{(s)}$与 $H^{(r)}$分离.

原理 2（几何消去） 若$W' = W \cup H^{(r)} \cup H^{(r+1)}$且 $H^{(r)} = D^r \times D^{n-r+1}$中 $0 \times \partial D^{n-r+1}$（称为 b 球面）与 $H^{(r+1)} = D^{r+1} \times D^{n-r}$中$\partial D^{r+1} \times 0$（称为 a 球面）横截相交于一点. 则存在一个微分同胚 $h: W' \to W$ 使在$H^{(r)} \cup H^{(r+1)}$的一个邻域之外为恒等.

原理 3（环柄相加） 设$W' = W \cup H_1^{(r)} \cup H_2^{(r)}$，其中 $H_1^{(r)}$，$H_2^{(r)}$ 均为 r 环柄. 设 S_1 和 S_2 分别是 $H_1^{(r)}$ 和 $H_2^{(r)}$ 的 a 球面且α是∂W 中连接S_1 和 S_2 的一条弧. 则存在 W'的另一等价的环柄体分解，将偶对（S_1，S_2）换成了（$S_1 \#_\alpha S_2$，S_2），其中$\#_\alpha$表在∂W 中沿α 作连通和.

原理 4（代数消去） 若 $W' = W \cup H^{(r)} \cup H^{(r+1)}$且 M_2 单连通 $n - r \geqslant 3$，$r \geqslant 2$ 并且 $n \geqslant 5$. 若$H^{(r)}$的 b 球面与$H^{(r+1)}$的 a 球面的相交数为± 1，则 $W' \approx W$.

这个代数消去法是 Smale 的 h 协边定理证明的核心，并且是微分拓扑学中最深刻的结果之一. 读者还应注意这个原理受到维数的限制. 其原因是它的证明依赖于微分拓扑学最重要的技术，现今被广泛地称作 **Whitney 绝招**（Whitney trick）的下述引理.

Whitney 引理［Why 12］ 设 P^p 和 Q^q 分别是光滑有向 m 维流形M^m 中的光滑有向p 维和q 维子流形，且 $p + q = m$. 设P^p 与 Q^q 横截地相交于有限个点，设 x，$y \in P^p \cap Q^q$ 使得P^p 与Q^q 在x 和y 的相交数反号$I_x(P,Q) = -I_y(P,Q)$. 如果 $p \geqslant 3$，$q \geqslant 3$ 并且 $\pi_1(M) = 0$，或者 $p = 2$，$q \geqslant 3$ 并且 $\pi_1(M \setminus Q) = 0$，则存在 M 上的一个同痕，将 P 变成P'，而使 P'与Q 横截地相交，并且$P' \cap Q = P \cap Q \setminus \{x, y\}$.

利用这个 Whitney 引理，代数消去法便归结为几何消去法. 注意，Whitney 引理中维数的限制是不可克服的，这就使得一般的消去法必受到维数限制，从而 h 协边定理的成立受到维数的

限制，需要满足 $n \geqslant 5$.

人们自然可能会想，尽管此处的工具受到维数限制，但不知 h 协边定理的结论是否对 $n=4$ 时成立．这是一个当时无法回答的问题．这就是四维拓扑学的困难所在，直到 20 世纪 80 年代才得到重大突破．读者可参见第二十五章．

第二十一章　K 理论

20 世纪 50 年代后期，在代数学和代数几何学以及微分拓扑学发展的基础上，形成了所谓 K 理论，它很自然地成为代数拓扑学的一个新篇章.

Riemann-Roch 定理是关于一个变量的代数函数的经典理论的最重要结果之一．这个定理在 1954 年被 Hirzebruch 推广到高维的紧复流形的情形，而被称为 Riemann-Roch-Hirzebruch 定理．后来又被 Grothendieck 推广为对映射的形式.

在这个过程中，形成了有出人意料的意义的 K 理论，对此作出贡献的有 Adams，Atiyah，Bott，Grothendieck，Hirzebruch 等人．重要参考书已有 [At 1]，[Ba 2]，[Bot 7]，[Ka] 及 [Mi 18].

K 理论是一种广义上同调理论．它有广泛而深刻的应用，椭圆偏微分算子的 Atiyah-Singer 指数定理的第一个证明就是其中一例 [At-S 1].

§ 21.1　Riemann-Roch 定理的推广

设 X 是一个紧的 Riemann 曲面，其亏格为 g．X 上的一个除子（divisor）是一个形式线性组合 $D=\Sigma m_i P_i$，其中 $m_i\in\mathbf{Z}$，

$P_i \in X$. 若 $D \neq 0$ 且其中 $m_i \geqslant 0$ 则说除子 D 为正的. 我们称除子 $D = \Sigma m_i P_i$ 的度为 $\deg D = \Sigma m_i$. 我们称除子 $D = \Sigma m_i P_i$ 是亚纯函数 f 的除子, 系指 P_i 为 f 的零点或极点, 而 m_i 或 $-m_i$ 为其阶, 此时记$(f) = D$. 对于给定的除子 D, 所有使得$(f) + D$ 为正的亚纯函数加上值为零的常数函数组成复数域 $\mathbf{C}$ 上的一个线性空间$L(D)$. Riemann-Roch 定理说: $\dim L(D) = \deg D - g + 1 + r(D)$, 其中 $r(D)$是由 D 决定的一个非负整数, 实际上 $r(D) = \dim L(K - D)$, 其中 K 是 X 上的一个典则除子, 即一个以亚纯函数为系数的微分形式.

将这个重要定理推广到紧的高维复流形的情形, 是从二十世纪五十年代开始由 K. Kodaira, Hirzebruch, Grothendieck, Atiyah 和 I. M. Singer 及其他人实现的.

设 X 是一个紧的复流形, B 是以 X 为底空间的一个复向量丛, $\Omega(B)$是 B 上全纯截面芽束 (sheaf of germs of holomorphic cross sections). 当 B 是被 X 上一个除子 D 确定时, 我们便得到 $H^0(X, \Omega(B)) \cong L(D)$. 因此在推广 Riemann-Roch 定理时, 将采用$\dim_{\mathbf{C}} H^0(X, \Omega(B))$以替代 $\dim(D)$等. 令 $\chi(X, \Omega(B)) = \Sigma_q (-1)^q \dim_{\mathbf{C}} H^q(X, \Omega(B))$. 设 F 是 X 上随某参数连续变化的解析丛, 则$\chi(X, \Omega(F))$保持常值. 设 X 是一个复 n 维射影代数流形. 记 X 的全陈类为 $c = 1 + c_1 + \cdots + c_n$, 并形式地记它为 $\prod_{i=1}^{n}(1 + \gamma_i)$, 其中 $\gamma_1, \cdots, \gamma_n$ 为幻想的不定元. 则第 i 个陈类 c_i 为 $\gamma_1, \cdots, \gamma_n$ 的第 i 个初等对称多项式. 则定义形式表示式 $T(X) = \prod_{i=1}^{n} \gamma_i/(1 - e^{-\gamma_i})$. 它可展成 γ_i 的形式幂级数, 并且其中对称的齐次项可表为陈类 $c_1, \cdots, c_n$ 的多项式. 设 F 是 X 上的一个解析复 q 秩向量丛. 类似地, 从 F 的全陈类也可形式地记为 $\prod_{j=1}^{q}(1 + \delta_j)$, 其中 $\delta_1, \cdots, \delta_q$ 为幻想的不定元. 我们定义

$\mathrm{ch}(F)=\sum_{j=1}^{q} e^{\delta_j}$，称为丛 F 的陈特征标．它展成形式幂级数后，一样可将其中对称齐次项采用丛 F 的陈类表出，它们是 X 的某个维数的上同调群中的元素．然后我们定义 $T(X,F)$ 为形式乘积 $ch(F)T(X)$ 在 X 的基本同调类 $[X]$ 上的赋值，它只由第 $2n$ 维的项所决定．$T(X,F)$ 被称为关于丛 F 的 Todd 示性数（Todd characteristic）．Hirzebruch［Hz 2］推广的定理，现被称为 Riemann-Roch-Hirzebruch 定理说，$\chi(X,\Omega(F))=T(X,F)$．特别，当 $n=1$，F 是由除子 D 决定的复线丛时，这个公式就是经典的 Riemann-Roch 定理．1959 年，Atiyah 和 Hirzebruch［At-H 1］将 Riemann-Roch 定理推广到任何紧的实微分流形上，这时已经用到了 K 理论．后来 Atiyah 和 Singer 在 1963 年，对任何紧的可定向微分流形上的椭圆偏微分算子建立的指数理论，所得结果正是 Hirzebruch 定理的一个推广．

§21.2　K 理论简介

一般认为，K 理论的出现首先是由 Atiyah 和 Hirzebruch 在 1959 年［At-H 1］中对复向量丛引进，而在［At-H 2］中得到系统化的．读者可参考［Hus］或［Ka］．今简介如下．

设 X 是一个带有有限 CW 复形结构的空间，设基域 Λ 是实数域 $\mathbf{R}$，复数域 $\mathbf{C}$ 或四元数域 $\mathbf{H}$．$E_\Lambda(X)$ 表示 X 上所有 Λ 向量丛的同构类所成集合，它们按 Whitney 和 $\oplus$ 组成一个加法半群（semigroup）．设 $F_\Lambda(X)$ 为由集合 $E_\Lambda(X)$ 生成的自由加法群，并设 $Q_\Lambda(X)$ 是 $F_\Lambda(X)$ 中由形如 $\xi\oplus\eta-\xi-\eta$ 的元素生成的子群．则定义 $K_\Lambda(X)$ 为商群 $K_\Lambda(X)=F_\Lambda(X)/Q_\Lambda(X)$．这个群现在通常称为半群 $E_\Lambda(X)$ 的 Grothendieck 群，而且有一个自然的半群

同态 θ：$E_\Lambda(X)\to K_\Lambda(X)$，满足万有性质．假设 Λ 是 $\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$，则 Λ 向量丛可作张量积$\otimes$而使$E_\Lambda(X)$成为一个半环（semiring），从而所得$K_\Lambda(X)$是一个环，称为 $E_\Lambda(X)$的 Grothendieck 环，θ 是一个满足万有性质的半环同态．$K_\Lambda(X)$中的加法记为 $+$，乘法记为 $\times$．

于是我们得有限 CW 复形空间范畴上的一个协变函子 K．对于连续映射 f：$X\to Y$，其中 X，Y 均为带有有限 CW 复形结构的空间，我们有自然的群或环同态$K_\Lambda(f)$：$K_\Lambda(Y)\to K_\Lambda(X)$，由将 f 提升为向量丛的拉回而诱导．

设 X 是带有有限 CW 复形结构的空间，$x_0\in X$ 是任一点．我们定义约化的群或环$\widetilde{K}_\Lambda(X)$如下：群或环$K_\Lambda(x_0)$典则地同构于整数群或环 $\mathbf{Z}$．而嵌入 i：$\{x_0\}\to X$ 诱导群或环同态$K_\Lambda(i)$：$K_\Lambda(X)\to K_\Lambda(x_0)=\mathbf{Z}$．我们定义 $\widetilde{K}_\Lambda(X)$为 $K_\Lambda(i)$的核，它是$K_\Lambda(X)$的一个子群或理想，且 $K_\Lambda(X)=\widetilde{K}_\Lambda(X)\oplus\mathbf{Z}$．并且每当运用记号 $\widetilde{K}_\Lambda(X)$时，空间 X 是理解为已点标的（即取定一个基点的）．通常，当 Λ 是 $\mathbf{R}$，$\mathbf{C}$ 或 $\mathbf{H}$ 时，$K_\Lambda(X)$和 $\widetilde{K}_\Lambda(X)$分别记作 KO，$\widetilde{KO}$，K，$\widetilde{K}$ 或KSP 和$\widetilde{KSP}$．

设 ξ 和 η 是$E_\Lambda(X)$中两个元素，即 X 上两个 Λ 向量丛的同构类．若存在 X 上两个平凡 Λ 向量丛 ε_1 和 ε_2，使得 $\xi\oplus\varepsilon_1=\eta\oplus\varepsilon_2$，则说 ξ 和 η 是稳定等价的（stably equivalent）．关于稳定等价的一个等价类称为 X 上的一个稳定 Λ 向量丛．若 X 是连通的，则 X 上所有稳定 Λ 向量丛的集合可以认为就是 $\widetilde{K}_\Lambda(X)$．

实向量丛的复化 i：$\xi\mapsto\xi\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{C}$ 是一个半环同态 i：$E_{\mathbf{R}}(X)\to E_{\mathbf{C}}(X)$，它导出一个环同态 i：$KO(X)\to K(X)$，使得 $i\theta=\theta i$．而复向量丛可看成实向量丛 ρ：$\xi\mapsto\xi_{\mathbf{R}}$，则导出环同态 ρ：$K(X)\to KO(X)$．同样，四元数向量丛可看成复向量丛，而导出群同态 ρ：$KSP(X)\to K(X)$．

设 ξ 是X 上的复向量丛．设全陈类表成$c(\xi)=\Pi(1+\gamma_i)$，

则定义陈特征标为 $\mathrm{ch}(\xi)=\Sigma\exp\ \gamma_i\in H^*(X;\mathbf{Q})$，其中 $\mathbf{Q}$ 是有理数域. 映射 $\mathrm{ch}:E_{\mathbf{C}}(X)\to H^*(X;\mathbf{Q})$ 被扩张成环同态 $\mathrm{ch}:K(X)\to H^*(X;\mathbf{Q})$. 复合同态 $\mathrm{ch}\ i:KO(X)\to H^*(X;\mathbf{Q})$ 与 $\mathrm{ch}\ \rho:KSP(X)\to H^*(X;\mathbf{Q})$ 也记作 ch. 这些 ch 都是从函子 K_Λ 到函子 $H^*(\quad;\mathbf{Q})$ 的自然变换.

记 Λ n 秩向量丛的结构群为 $O_\Lambda(n)$，对应于 Λ 是 $\mathbf{R}$，$\mathbf{C}$ 或 $\mathbf{H}$，$O_\Lambda(n)$ 分别是 $O(n)$，$U(n)$ 或 $Sp(n)$. 从包含关系 $O_\Lambda(n)\subset O_\Lambda(n+1)$ 取归纳极限得到群 O_Λ，它带上细拓扑而成拓扑群. 设 B_Λ 为群 O_Λ 的分类空间. 若 X，Y 为两个空间，用记号 $[X,Y]$ 表示从 X 到 Y 的所有连续映射同伦类的集合，而用记号 $[X,Y]_0$ 表示从点标空间 X 到点标空间 Y 的所有连续映射同伦类的集合，则由纤维丛的分类定理知，$K_\Lambda(X)=[X,B_\Lambda\times\mathbf{Z}]$，$\widetilde{K}_\Lambda(X)=[X,B_\Lambda]_0$.

对于有限 CW 偶对 (X,A)，X/A 表由 X 将 A 塌缩成一点所得之商空间，并取该点为基点. 令 $K_\Lambda^{-n}(X,A)=\widetilde{K}_\Lambda(\Sigma^n(X/A))$，$n=0,1,2,\cdots$，其中 Σ^n 表 n 重约化双角锥（见§9.8）. 如此，我们得到了一个上同调理论，它满足除“维数公理”以外的所有上同调理论的公理（参见§7.2，§7.3）.

向量丛的张量乘积运算诱导了叉积（cross product）：$K_\Lambda^{-m}(X,A)\otimes K_\Lambda^{-n}(Y,B)\to K_{\Lambda'}^{-(m+n)}(X\times Y,X\times B\cup A\times Y)$，其中 Λ' 为 Λ 的中心，它对 $\mathbf{H}$ 说是 $\mathbf{R}$，而对其他两种为 Λ. 当 $\Lambda=\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$ 时，上积（cup product）$K_\Lambda^{-m}(X)\otimes K_\Lambda^{-n}(X)\to K_\Lambda^{-(m+n)}(X)$，$K_\Lambda^{-m}(X)\otimes K_\Lambda^{-n}(X,A)\to K_\Lambda^{-(m+n)}(X,A)$ 定义为叉积与对角映射 Δ：$X\to X\times X$ 的诱导同态 Δ^* 的复合. 复化同态 i：$KO^{-n}(X,A)\to K^{-n}(X,A)$ 保持上积. 陈特征标 ch：$K_\Lambda^{-n}(X,A)\to\widetilde{H}^*(\Sigma^n(X/A);\mathbf{Q})$ 与双角锥同构 $\widetilde{H}^*(\Sigma^n(X/A);\mathbf{Q})\to H^*(X,A;\mathbf{Q})$ 的复合仍记作 $\mathrm{ch}:K_\Lambda^{-n}(X,A)\to H^*(X,A;\mathbf{Q})$. 同态 ch 在 Λ 是 $\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$ 时保持上积.

§ 21.3 Bott 周期性定理

Bott 周期性定理在 K 理论中扮演着中心定理的角色. 这是 Bott 在［Bot 5］中陈述的.

设 ξ_Λ 是 Λ 射影曲线 ΛP^1 上的典则 Λ 线丛. 元素 $g_\Lambda \in \widetilde{K}_\Lambda(\Lambda P^1)$当 $\Lambda = \mathbf{C}, \mathbf{H}$ 或 $\mathbf{R}$ 时是

$$g_{\mathbf{C}} = \theta(\xi_{\mathbf{C}}) - 1 \in \widetilde{K}(S^2) = K^{-2}(x),$$

$$g_{\mathbf{H}} = \theta(\xi_{\mathbf{H}}) - 1 \in \widetilde{KSP}(S^4) = KSP^{-4}(x)$$

及

$$g_{\mathbf{R}} = g_{\mathbf{H}} \times g_{\mathbf{H}} \in \widetilde{KO}(S^8) = KO^{-8}(x),$$

并被称为 Bott 生成元.

Bott 周期性定理　(1) $\widetilde{K}(S^2)$, $\widetilde{KSP}(S^4)$及$\widetilde{KO}(S^8)$是分别由 $g_{\mathbf{C}}$, $g_{\mathbf{H}}$ 及 $g_{\mathbf{R}}$ 生成的无限循环群. 并且$\mathrm{ch}(g_{\mathbf{C}}) = \sigma^2$, $\mathrm{ch}(g_{\mathbf{H}}) = \sigma^4$ 及 $\mathrm{ch}(g_{\mathbf{R}}) = \sigma^8$, 这些 $\sigma^n \in H^n(S^n; \mathbf{Z})$是生成元.

(2) 叉积

$$K^{-n}(X,A) \otimes K^{2}(x) \to K^{-(n+2)}(X,A),$$

$$KSP^{-n}(X,A) \oplus KSP^{-4}(x) \to KO^{-(n+4)}(X,A),$$

$$KO^{-n}(X,A) \otimes KO^{-8}(x) \to KO^{-(n+8)}(X,A)$$

均为同构.

由此, 按 $a \mapsto a \times g_\Lambda$ 得 Bott 同构:

$$K^{-n}(X,A) \cong K^{-(n+2)}(X,A),$$

$$KSP^{-n}(X,A) \cong KO^{-(n+4)}(X,A)$$

及

$$KO^{-n}(X,A) \cong KO^{-(n+8)}(X,A).$$

一个点的上同调$K_\Lambda^{-n}(x)=\widetilde{K}_\Lambda(S^n)=\pi_n(B_\Lambda)=\pi_{n-1}(O_\Lambda)$则由［Bot 4］给出（参考§20.1）.

§21.4　代数 K 理论

代数 K 理论是一门代数学分支，主要论及环的取阿贝尔群为值的函子 K_n，它们具有某种广义同调理论的特征. 这个分支源于 Grothendieck 关于 Riemann-Roch 定理的工作用到的 K 群，见随后 A. Borel 和 Serre 的文章［Bor-S 3］. 接着在 1964 年，由 H. Bass 引进了 K_1，并广泛地研究了 K_0 与 K_1［Ba 1，2］. K_2 是由 Milnor［Mi 18］引进的. 高阶 K 理论是由 D. G. Quillen［Q］以及其他人从不同角度构作出来的.

代数 K 理论与许多不同的数学分支有密切关联，如拓扑学，代数几何以及数论等，此处不予赘述.

第二十二章　换球术

换球术技术是 20 世纪 60 年代微分拓扑学的主要方法，它的创造和广泛应用带来流形拓扑学的重大发展.

这个新技术首见于 Milnor 1960 年二月美国数学会在亚利桑纳大学举行的第三届纯粹数学会议上的讲演和 A. H. Wallace 的一篇文章. Wallace 称此做法为 spherical modification，Milnor 则称之为 surgery，并说这是在 $n=p+q+1$ 维流形中去掉一个嵌入的 p 维球面而换上一个嵌入的 q 维球面. 后来流行采用 surgery 一词，我们译作换球术，想必保存了原作者的本意. 同时，Milnor 还说，是 Thom 向他描述了 surgery，并指出可用来杀去同伦群.

接着，Milnor 和 Kervaire 用此法讨论了同伦球面群，实际上在 $n\neq 3$，4 的情形是 n 维拓扑球面上微分结构的微分同胚类之集合.

换球术的进一步发展和推广，由美国人 W. Browder，苏联人 S. P. Novikov 和英国人 C. T. C. Wall 等为代表.

换球术推广应用于拓扑流形问题，见第二十三章，而在 4 维的发展，则见第二十六章.

§22.1 换球术的出现

Milnor 在 [Mi 11] 中首次提出换球术概念，他感谢 Thom 向他描述了换球术，并指出可用来杀去同伦群. Milnor 的这篇文章的标题便是“杀去同伦群”，换球术之用途也已了然.

换球术的基本做法如下. 设 D^{p+1}表示欧氏空间 $\mathbf{R}^{p+1}$中的以原点 o 为中心的单位球体，其边缘为单位球面 S^p. 乘积流形 $S^p\times S^q$可看成

$$S^p\times D^{q+1}$$

的边缘，也可看成

$$D^{p+1}\times S^q$$

的边缘. 设 W 是一个光滑的 n 维流形，设 f: $S^p\times D^{q+1}\rightarrow W$ 是一个光滑的嵌入，$n=p+q+1$. 令 $\chi(W, f)$ 表示不交并

$$(W-f(S^p\times o))\sqcup(D^{p+1}\times S^q)$$

中对 $u\in S^p$, $v\in S^q$, $0<\theta\leqslant 1$, 将 $f(u, \theta v)$ 与 $(\theta u, v)$ 等置而得之商流形. $\chi(W, f)$ 是一个光滑流形. 若 W 是有向的，且 f 是保向的，则 $\chi(W, f)$ 也是有向的，其定向与 W 的定向相协调. 流形 $\chi(W, f)$ 称为从 W 经一个 $(p+1, q+1)$ 型换球术而得. 这里 p 的变化范围为 $0\leqslant p<n$. 还可推广到 $p=-1$ 及 $p=n$, W 经 $(0, n+1)$ 型换球术得 $W\sqcup S_n$, 而 $W\sqcup S^n$ 经 $(n+1, 0)$ 型换球术得 W.

显然，换球术前后两流形地位对称. 若 $W'=\chi(W, f)$ 是从 W 经 $(p+1, q+1)$ 型换球术而得，则 W 可从 W'经一个 $(q+1, p+1)$ 型换球术而得.

若 W_1, …, W_r 是一串流形，使得每个 W_{i+1}是从 W_i 经一个换球术而得，我们称 W_1 与 W_r 是 χ 等价的.

一个重要的事实是，χ 等价就是协边．两个光滑的闭流形（有向或无向）是 χ 等价的，当且仅当它们是属于同一个（有向或无向）协边类．因此，Stiefel-Whitney 示性数，Pontrjagin 示性数和号差等均为换球术之不变量．

设 W 是光滑的 n 维流形，$\lambda\in\pi_p(W)$ 是一个同伦类．若嵌入 f：$S^p\times D^{n-p}\to W$，使得 $\lambda=f_*(\iota)$，其中 ι 是无限循环群 $\pi_p(S^p\times D^{n-p})$的一个生成元．设 $n\geqslant 2p+2$，做换球术得到 $W'=\chi(W,f)$．则可知当 $i<p$ 时 $\pi_i(W')\cong\pi_i(W)$，而$\pi_p(W')$同构于 $\pi_p(W)$ 关于一个含有 λ 的子群的商群．也就是说，W 经此换球术后，杀去了同伦类 λ 而得 W'．

于是，为了应用上面的做法，关键在于何种同伦类 $\lambda\in\pi_p(W)$可用一个嵌入 $S^p\times D^{n-p}\to W$ 表示？

若 $n\geqslant 2p+1$，则由 Whitney 嵌入定理知，存在 $f_0\in\lambda$ 为嵌入．可以证明，f_0 能延拓为嵌入 f：$S^p\times D^{n-p}\to W$，当且仅当 $f_0^*\tau^n$ 是一个平凡丛，其中 τ^n 是 W 的切丛．

设 W 是有向 n 维流形，而 $BSO(n)$ 表旋转群 $SO(n)$ 的一个分类空间，并且 T：$W\to BSO(n)$ 是 W 的切丛 τ^n 的分类映射．则存在一个嵌入 $S^p\times D^{n-p}\to W$ 表示 λ，当且仅当 T 诱导的同态 T_*：$\pi_p(W)\to\pi_p(BSO(n))$零化 λ．于是我们可做到，当 $n\geqslant 2$ 而 $1\leqslant p\leqslant n/2-1$ 时，每个光滑的紧有向 n 维流形 χ 等价于一个流形 W，使得它是连通的，并且其切丛的分类映射 T 诱导的同态 T^*：$\pi_p(W)\to\pi_p(BSO(n))$是一个单射．此时，低的这一半维数的可用换球术杀去的同伦类已经都杀完．

即使在低的维数，如果不再附加条件，一般是不能杀光一个同伦群的．我们称 W 是一个 π 流形，如果其切丛 τ^n 与一个平凡线丛 ε^1 的 Whitney 和 $\tau^n\oplus\varepsilon^1$ 是平凡丛．例如 n 维球面 S^n 是一个 π 流形．这种流形的低的一半维数的同伦群可以被杀光，即任何紧的 n 维 π 流形 W 是 χ 等价于一个 $[n/2-1]$ 连通的 π 流

形．其缘由是 π 流形的条件保证了在低维可做换球术，并且所得流形仍然是 π 流形，从而换球术可以继续进行，直到所得流形是 $[n/2-1]$ 连通的．

换球术的施行对象还可以推广．我们称 W 是 k 可平行化的，如果它的切丛在它的某个三角剖分的 k 维骨架上的限制是平凡的．特别，每个可定向的流形都是 1 可平行化的．如果紧流形 W 是 k 可平行化的，则 W 是 χ 等价于一个 k 平行化的流形，它是 $\min(k,[n/2-1])$ 连通的．

留下来的困难是在中间维数．例如当 $n=2m$ 或 $2m+1$ 而 $k=m$ 时，如何杀去 m 维的同伦类，是一个不简单的任务．

§22.2　同伦球面群

Milnor 和 Kervaire 于 1962 年在［Ke-M］中应用 §22.1 的方法研究了同伦球面．这实际上是在 $n\neq3$，4 的情形，计算了 n 维拓扑球面 S^n 上微分结构的微分同胚类之集合．

从两个连通的光滑的 n 维流形各去掉一个 n 维开球体，然后将留下的两个边缘用一个微分同胚粘合，可得一个连通的光滑流形，称为那两个流形的连通和．若所给的两个流形均为有向的，则取一反向微分同胚来粘合，可从两流形的定向得到连通和的定向．在相差保定向的微分同胚的意义下，连通和运算是良定的，结合的和交换的．并且，在连通和运算之下，标准球面 S^n 起恒等元作用．

一个光滑的闭 n 维流形称为一个同伦 n 维球面，如果它具有球面 S^n 的伦型．两个同伦 n 维球面的连通和还是一个同伦 n 维球面．连通和运算可以过渡到 h 协边类集合中．从而同伦 n 维球面的 h 协边类在连通和之下成为一个阿贝尔群，记作 Θ_n．

该文的主要结论是：当 $n \neq 3$ 时群 Θ_n 是有限群.

原来计划该文的第二部分将给出 n 直到 18 的所有群 Θ_n 的阶如下：

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$\lvert\Theta_n\rvert$	1	1	?	1	1	1	28	2	8	6	992	1	3	2	16256	2	16	16

但他们一直未能发表这第二部分. 直至 1983 年斯普林格出版社的 Lecture Notes in Math. 1126 卷，Algebraic and Geometric Topology Proceedings，Rutgers 1983，刊登了 J. P. Levine 的文章 [Lev]，其中完成了上述结果的证明. Levine 说，他相信这些内容是当初 Kervaire 和 Milnor 准备在那篇文章的第二部分中发表的.

[Ke-M] 和 [Lev] 中的论证和计算很精彩，将代数拓扑学和微分拓扑学中深刻的知识运用于流形的拓扑学，体现了换球术这个新技术的强大威力.

值得强调指出的是，基于广义 Poincaré 猜测和 h 协边定理在 $n \geqslant 5$ 时被证明，当 $n \neq 3, 4$ 时，群 Θ_n 可以看作拓扑 n 球面 S^n 上所有光滑结构的微分同胚类之集合. 由 Θ_n 的有限性，这些球面上光滑结构互不微分同胚的个数是有限的，并当 $n \neq 3, 4$ 且 $\leqslant 18$ 时其个数如上表中所列.

§22.3　流形的同伦类定理

从 1962 年开始，W. Browder [Brd 2] 和 S. P. Novikov [Nov 1, 2, 3, 5] 推广了换球术，先对单连通的闭光滑流形建立了换球术理论. 随后 C.T.C. Wall 也加入这个行列 [Wa 6, 7, 8]，他们将这个理论推广到相对的情形，再推广到非单连通

的情形．其目的是为了对给定的流形的同伦类进行分类．

我们先从拓扑学分类的困难讲起．粗略看来，拓扑学的目标是找到一个办法，可以判断任何两个对象，例如空间，多面体或流形，它们是否同胚或微分同胚等．但随着二十世纪现代数学的进步，人们已经认识到某些数学问题是不可判定的．小 A. A. Markov 在 1958 年国际数学家大会上宣布［Ma 2］，因为任何一个有限表出群均可充当 4 维及以上的 n 维闭组合流形的基本群，而有限表出群的同构问题是不可解的，因此高于 3 维的任何维数的组合流形的同胚问题是不可解的，从而高于 3 维的多面体的同胚问题是不可解的，并且拓扑空间的同胚问题也是不可解的．

一个自然的做法是，针对一个给定的比较小的类来进行分类．Poincaré 的著名猜测就是一个这类的问题，它说，三维的闭流形中包含着三维球面的同伦类中的流形均互相同胚，不过至今尚未解决．Milnor［Mi 4］的 7 维怪球面的发现，就是针对 7 维拓扑球面或组合球面上的光滑结构进行微分同胚分类，是这个方面的第一个定理．前面 § 22.1 和 § 22.2 中谈到的换球术之应用，也是这方面的工作．

W. Browder［Brd 2］和 S. P. Novikov［Nov 1, 2, 3］推广了上面的做法，得到光滑流形的同伦类定理．设 X 是一个单连通的 $m\geqslant 5$ 维的 Poincaré 复形，即满足 Poincaré 对偶定理的 CW 复形．设 η 是以 X 为底空间的秩为 K 的有向实向量丛，$K>m+1$，$T(\eta)$ 为 η 的 Thom 空间，$\alpha\in\pi_{m+K}(T(\eta))$ 满足 $h(\alpha)\cap U_m=[X]$，其中 $h: \pi_{m+K}(T(\eta))\to H_{m+K}(T(\eta))$ 是 Hurewicz 同态，$U_m\in H^m(T(\eta))$ 是 Thom 类，使得 $\cap U_m$: $H_{m+K}(T(\eta))\to H_m(X)$ 是同构．（1）如果 m 是奇数，或（2）如果 $m=4k$ 并且 $L_k(p_1(\eta^{-1}), \cdots, p_k(\eta^{-1}))[X]=\sigma(X)$，其中 L_k 为 Hirzebruch 多项式（参见 § 18.4），η^{-1} 为 X 上的 m 秩向量丛，使得 $\eta\oplus\eta^{-1}$ 平凡，$\sigma(X)$ 为复形 X 的 H^{2k}（X; $\mathbf{Q}$）

上由 $\langle x\cup y, [X]\rangle$ 给出的二次形式的号差，$[X]$ 为 $H_{4k}(X)$ 中的定向类. 则存在一个同伦等价 $f: M^m\to X$，其中 M^m 是一个光滑的闭 m 维流形，使得 $M^m\subset S^{m+K}$的法丛 $\nu=f^*(\eta)$，并且 f 可在由 α 表示的法协边类中找到. 这个定理对于相对的情形是由 Wall 得到的 [Wa 6].

对非单连通流形施行换球术，也是 W. Browder [Brd 1], S. P. Novikov [Nov 5] 和 Wall [Wa 7] 首先进行的. Wall 的书 [Wa 8] 则集此大成，可供读者参考，此处从略.

非单连通流形的换球术在拓扑流形问题的研讨中起着重要作用，这是下一章介绍的内容. 而在 4 维情形，如何克服困难实现换球术的应用，则是 20 世纪 80 年代拓扑学的重大突破之一，请读者参考第二十六章.

第二十三章　拓扑流形问题

自 20 世纪 50 年代中期 Milnor 发现 7 维怪球面后，光滑结构的存在性及分类便成了微分拓扑学的中心议题．进而扩大为研究拓扑流形上的组合结构的存在性和分类，包括主猜测对流形是否成立．这些问题统称拓扑流形问题．

在 1958 年国际数学家大会上 Thom 建议，有关流形的光滑化的分类应当归结为某种丛的截面分类问题．这个深刻的预见和启发，为随后 20 年的拓扑学史所印证，并使大多数问题获得本质的解决．

在拓扑流形问题的研究中，非单连通流形的换球术起着重要作用，这是 S. P. Novikov 首先指出的，特别指三角剖分，主猜测和流形的有理系数 Pontrjagin 类的拓扑不变性等．

在这个领域里，那一时期作出过重要贡献的人很多，其中如 M. Hirsch，R. C. Kirby，R. Lashof，I. Masden，B. Mazur，R. J. Milgram，Milnor，J. Munkres，M. Rothenberg，L. Siebenmann，项武忠等人．

§ 23.1　拓扑流形问题

为说清什么是拓扑流形问题，我们先回忆什么是拓扑流形，

组合流形和微分流形.

一个（无边的）n 维拓扑流形（topological manifold）M^n 是一个具有可数基的 Hausdorff 空间，它有一个开覆盖 $\{U_\lambda\}$ 及一个映射族 $\{\varphi_\lambda\}$，使得 φ_λ 是将 U_λ 同胚地映成 $\mathbf{R}^n$ 中的一个开子集. 这样的偶对（U_λ，φ_λ）称为区图（chart），而族 $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}$ 称为一个图册（atlas）. 如果将上述 $\mathbf{R}^n$ 换成 $\mathbf{R}^n_+ = \{(x_1, \cdots, x_n): x_n \geqslant 0\}$，则 M^n 称为一个带边的 n 维拓扑流形，且 M^n 的边缘 ∂M^n 是一个无边的（$n-1$）维拓扑流形，它由 M^n 中所有对应于 $\mathbf{R}^{n-1} \times 0 \subset \mathbf{R}^n_+$ 的点组成. 一个带边的 n 维拓扑流形 M^n 是一个无边的 n 维拓扑流形，如果它的边缘流形 $\partial M^n = \varnothing$.

一个（无边的或带边的）n 维拓扑流形 M^n 若是一个多面体，并且其单纯三角剖分的每个顶点的星形均组合等价于一个 n 维单形，则称为一个（无边的或带边的）n 维组合流形（combinatorial manifold）. 一个（无边的或带边的）n 维拓扑流形 M^n 称为一个分片线性 n 维流形（piecewise linear manifold），若它有一个图册 $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}$，使得对任意 λ 和 μ，映射 $\varphi_\lambda \circ \varphi_\mu^{-1}$: $\varphi_\mu(U_\lambda \cap U_\mu) \to \varphi_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu)$ 是分片线性的. 分片线性流形可以三角剖分，并且分片线性流形等价于组合流形.

一个（无边的或带边的）n 维拓扑流形 M^n 称为一个 n 维 C^r 微分流形（differentiable manifold），若它有一个图册 $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}$，使得对任意 λ 和 μ，$\varphi_\lambda \circ \varphi_\mu^{-1}$: $\varphi_\mu(U_\lambda \cap U_\mu) \to \varphi_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu)$ 是 C^r 微分同胚，此处 $r \geqslant 1$ 或 ∞. 这种图册的一个极大化也是一个这种图册，称为 M^n 上的一个 C^r 微分结构（differentiable structure）. 这里值得注意的是，对不同的 $r \geqslant 1$，所得 C^r 微分结构按定义是不相同的. 但可以证明，若给了一个 $C^r(r \geqslant 1)$ 微分结构，则对任意 $s > r$ 或 $= \infty$，给定的 C^r 微分结构中必包含着一个 C^s 微分结构. 这说明，一旦给了一个 C^1 微分结构，$r \geqslant 1$，我们可以任意提高微分结构的连续可微的阶，甚至到 C^∞. 这个

事实的认定在1960年以前属于口头文学，后来被写入［Mor 4］. 读者可参考［Mu 6］. 今后，有时为了方便，取微分结构之阶为C^{∞}，而称为光滑结构.

有时，我们用 *TOP* 流形表拓扑流形，*PL* 流形表分片线性流形或组合流形，*DIFF* 流形表微分或光滑流形.

我们来比较一下这三种范畴的流形概念. 按定义便知，组合流形和微分流形都是拓扑流形，它们是在拓扑流形上附加组合结构和微分结构而成. 我们自然会问种种有关组合结构和微分结构之存在性和唯一性问题.

1. 给定了一个拓扑流形，其上是否存在组合结构，即是否它有一个三角剖分，使之成为组合流形？如果存在组合结构，那么它的两个使它成为组合流形的三角剖分是否组合等价，即是否存在一个三角剖分是原来两个三角剖分的重分？这后一问题便是关于流形的主猜测（Hauptvermutung），由 Steinitz 于 1908 年［Stei］正式写出. 可以认为，Poincaré 及其同时代人心中断言这一问题的答案为“是”. 因为在 Poincaré 的系列论文中，凡用组合结构表达出的量或事实，容易证明其为重分不变的，便被断言为拓扑不变量. 如果关于流形的主猜测是否定的，则还应当回答在给定的拓扑流形上有多少不同的组合结构的组合等价类.

2. 给定了一个拓扑流形，其上是否存在微分结构？如果存在微分结构，是否必定唯一？如果不唯一，则有多少？

3. 给定了一个微分流形，其上是否存在与给定微分结构相容的组合结构？如果存在，这种组合结构在组合等价之下的类是否必定唯一？如果不唯一，则有多少？

4. 给定了一个组合流形，其上是否存在与给定组合结构相容的微分结构？如果存在，这种微分结构是否必定唯一？如果不唯一，则有多少？

历史的发展是这样的. 到 20 世纪 50 年代初期，已经证明，给了 $C^r(r\geqslant 1)$ 微分结构，则存在组合结构与之相容，即在该三

角剖分的每个单形上剖分映射是 C^r 非退化的，而且任何两个与同一个微分结构相容的组合结构是组合等价的．这就是说，问题3已获得解答，存在性和唯一性都成立．并且相容性的说法已表述得很恰切，今后凡涉及微分结构和与之相关联的组合结构，均自然要求两者相容．例如问题4中的微分结构系指与组合结构相容者．上述是 Cairns [C 2，5] 和 J. H. C. Whitehead [WhH 4] 的工作，读者可参看 [Mu 6]．另外，当维数很低时，$n \leqslant 3$，三种范畴重合，并且组合结构和微分结构均唯一．$n=1$ 的情形容易．$n=2$ 的情形，二维流形可三角剖分为组合流形问题由 Radó[R] 解决，二维复形的主猜测由 C. Papakyriakopoulos [Pa] 证明．比较难的是 $n=3$，有关三角剖分和主猜测首先由 Alexander [Al 10] 和 Cairns [C 5] 讨论，但彻底解决见 E. Moise [Moi 1]．此外，对 $n=4$，问题4可得到部分回答，4维组合结构上存在唯一的与之相容的微分结构，因此对4维而言，组合流形等于微分流形．这是 Cairns 在1944年证明的 [C 4]．关于4维的进一步发展，读者可参见第二十六章．

20世纪50年代中期，Milnor 的7维怪球面 [Mi 4] 否定了微分结构的唯一性，接着 Kervaire [Ke 2] 否定了微分结构的存在性．进而 Kervaire 和 Milnor 着手计算 n 维球面 S^n 上的光滑结构的数目 [Ke-M]，即问题2有了本质的进展．

到20世纪60年代中期，问题1和问题4除很低维数外，基本未动，即4维以上的拓扑流形的三角剖分问题与主猜测和5维以上的组合流形的光滑化与光滑化的分类等，尚待解决，这便是通常所说的“拓扑流形问题”．

§ 23.2　微观丛和 Pontrjagin 类不是拓扑不变的

Milnor 于 1964 年发表了 [Mi 15]，其中建立了微观丛理论．其目的是想对于没有微分结构的拓扑流形给出类似于"切丛"的事物．

一个微观丛（microbundle）$\mathscr{X}$ 是一个图表

$$B \xrightarrow{i} E \xrightarrow{j} B.$$

由下列组成：

（1）一个拓扑空间 B 称为底空间；

（2）一个拓扑空间 $E=E(\mathscr{X})$ 称为全空间；

（3）连续映射 i 和 j 分别称作内射和投射．复合映射 $j\circ i$ 要求等于 B 上的恒同映射．并且还满足：

局部平凡条件　对任意点 $b\in B$ 存在 b 的开邻域 U 和 $i(b)$ 的开邻域 V，使得 $i(U)\subset V$，$j(V)\subset U$，满足 V 同胚于 $U\times \mathbf{R}^n$ 并且此同胚使下面图表交换

$$\begin{array}{ccccc} & & V & & \\ & \overset{i|U}{\nearrow} & & \overset{j|V}{\searrow} & \\ U & & \downarrow & & U \\ & \underset{\times 0}{\searrow} & & \underset{p_1}{\nearrow} & \\ & & U\times\mathbf{R}^n & & \end{array}$$

其中 $\times 0$ 表示内射 $u\mapsto(u,0)$，而 p_1 表示投射 $p_1(u,x)=u$．整数 n 大于（或等于）称为 $\mathscr{X}$ 的纤维的维数或 $\mathscr{X}$ 的秩．

容易定义微观丛的诱导（或拉回），Whitney 和$\oplus$等运算．

B 上任意秩为 n 的实向量丛 ξ 决定一个基础微观丛 $|\xi|$．设 M 是一个 n 维拓扑流形，Δ：$M\to M\times M$ 是对角映射，则 $M \xrightarrow{\Delta} M\times M \xrightarrow{p_1} M$ 组成一个微观丛，称为 M 的切微观丛（tangent microbundle)，并记作 t_M．

类似于向量丛的 K 理论（参见第二十一章），对微观丛亦可定义稳定等价类，即微观稳定类. 有限维复形 B 上的微观丛的稳定类在 Whitney 和运算之下成为一个阿贝尔群，记作 $KTOP$(B). 于是由向量丛 ξ 的稳定类(ξ)到其基础微观丛$|\xi|$的微观丛稳定类给出自然变换 $KO(B)\to KTOP(B)$.

微观丛的重要功用之一，是可用来讨论光滑化问题. Milnor 在这篇文章中，有下述**光滑化定理**：

设 M 是一个拓扑流形，ξ 是以 M 为底空间的某个向量丛. 对于某个充分大的 q 值，乘积 $M\times\mathbf{R}^q$ 可以给出光滑结构，使得 $M\times\mathbf{R}^q$ 的切丛同构于 ξ 与平凡丛 ε^q 的乘积 $\xi\times\varepsilon^q$ 的充要条件是，M 的切微观丛 t_M 稳定同构于$|\xi|$. 换句话说，这个条件可改述为 t_M 的微观丛稳定类(t_M)在同态 $KO(M)\to KTOP(M)$之下是(ξ)的像.

然后，Milnor 构作了一个开流形，其上有一怪异光滑结构，从而得知其 Pontrjagin 示性类不是拓扑不变的. 其构作概述如下.

设 $X=S^{4n-1}\cup_q e^{4n}$为由 $4n-1$ 维球面用一个映射度为 q 的映射附贴一个 $4n$ 维胞腔 e^{4n}而得的复形，其中 $n>1$，q 为一可以除尽（$2^{2n-1}-1$）num（B_n/n）的素数，这里 B_n 是第 n 个 Bernoulli 数，而 num（B_n/n）是当将 B_n/n 表作既约分数时的分子. 可以证明，$KO(X)$ 是 q 阶循环群，而典则同态 $KO(X)\to KTOP(X)$ 是零同态. 将 X 嵌入某欧氏空间 $\mathbf{R}^m$，令 U 是 X 的以 X 为收缩核的一个开邻域. 带有通常光滑结构的 U 是可平行化的. 但由前述光滑化定理，当 k 充分大时 $U\times\mathbf{R}^k\subset\mathbf{R}^{m+k}$可重新光滑化，使得 $U\times\mathbf{R}^k$ 不是可平行化的，这是因为 $KO(U)\to KTOP(U)$ 的核中有非零元，记为 $c^*(\gamma)\neq 0$，它可充当光滑化定理中的（ξ）. 如果 $q>2n$，例如 $n=2$，$q=7$，则可证明 $p_n(c^*(\gamma))\neq 0$. 这说明重新光滑化所得 Pontrjagin 类与通常光滑化的不一样. 由此可见，Pontrjagin 示性类不是拓扑不变的，

当然，微分流形的切丛也不是拓扑不变的.

接着 J. Kister [Kis] 证明，微观丛都是具有以 $H_0(n)$ 为结构群的纤维丛，其中 $H_0(n)$ 为 $\mathbf{R}^n$ 到自身的所有保持原点不动的同胚组成的拓扑群.

关于 Pontrjagin 类还值得指出，模 3 和模 4 Pontrjagin 类是拓扑不变的 [Wu 9]，而有理 Pontrjagin 类是组合不变的 [Ro-Sv] [Th 4]. 于是，最令人注目的问题是有理 Pontrjagin 类是否是拓扑不变的. 这个问题的答案是 S. P. Novikov 的贡献 [Nov 4]，他证明了有理 Pontrjagin 类是拓扑不变的. 这是 20 世纪 60 年代拓扑学的重大成就之一.

§ 23.3 组合流形的光滑化及协合分类

光滑化理论是有关分片线性流形（即组合流形）上光滑化的寻求和分类问题的研究. M. Hirsch 和 Mazur 在 1963 年左右发展了这一理论 [HirM 2] [Maz-P]，特别可参考 [HirM-M].

光滑化的分类所采用的等价关系不是微分同胚，而是较强的协合（concordance）：M 上的两个光滑化是协合的，若它们能够延拓成 $M\times I$ 上的一个光滑化. 这个关系有比微分同胚更好的函子性质，因为协合与同痕（isotopy）是一样的：M 的两个光滑化 α，β 是同痕的，若存在微分同胚 $M_\alpha\rightarrow M_\beta$ 是分片可微同痕于恒等映射 1_M：$M\rightarrow M$.

Thom 于 1958 年的国际数学家大会上建议 [Th 5]，光滑化的分类应归结为某种丛的截面的分类. 这个想法实现如下.

首先，Munkres [Mu 1, 2] 对某些光滑化问题建立了阻碍理论，A. Gleason 则证明了（未发表，1959 年）每个可缩的开的分片线性流形都可光滑化. Milnor 则猜想，给定的分片线性流

形 M 上的所有光滑化的协合类的集合记作 $\mathscr{S}(M)$，当 M 为 S^n 时，$\mathscr{S}(S^n)$ 同构于 $\pi_n(PL/O)$. 这提示 Thom 说的那种丛的纤维应当是 PL/O，其中 O 和 PL 分别表示正交群 $O(k)$ 和分片线性群 $PL(k)$ 的顺向极限. Milnor 接着发明了微观丛，并证明了一个光滑化定理（参见 §23.2），M. Hirsch [HirM 2]，Mazur 和 Poenaru [Maz-P] 则证明了稳定性定理：$\mathscr{S}(M)$ 一一对应于 $\mathscr{S}(M\times\mathbf{R})$. 这个结果被用来验证了 Milnor 的猜想，这也就实现了 Thom 的想法.

下面着重介绍 M. Hirsch 和 Mazur 在 [HirM-M] 中的主要成果.

我们约定，对 n 维实向量丛，取结构群为 $GL(n)$. 设 $\xi=(E, p, B, \Phi)$ 为一向量丛，若底空间为一多面体并且图册 Φ 中的转移函数 g_{ij} 均为分片光滑的，即在 $U_i\cap U_j$ 的某个三角剖分之下，每个单形上均为光滑，则称此图册为分片光滑的，简记为 PD. 一个极大 PD 图册，称为一个 PD 向量丛结构. 若 M 是拓扑流形，$\xi=(E, p, M, \Phi)$ 是 M 上的一个向量丛. 设 α 是 M 上的一个光滑结构，Φ 的一个子图册 $\Phi_0\subset\Phi$ 称为 ξ 的一个 α 之上的光滑图册，如果 Φ_0 中每个转移函数 $g_{ij}: U_i\cap U_j\longrightarrow GL(n)$在光滑结构 α 中是光滑的. Φ 中一个最大的 α 之上的光滑图册 Φ_1 称为 ξ 的 α 之上的微分丛结构，它的存在性和唯一性不难证明. 设 M 是 PL 流形，并且 α 是 PL 流形 M 的一个光滑化，则 α 之上的一个微分向量丛 (E, p, M, Φ_1) 的光滑图册 Φ_1，包含唯一的 PD 向量丛结构 Φ_2.

设 M 是一个 PL 流形，则用 $\mathscr{S}^*(M)$ 表示 M 的所有光滑化之集合，并且用 $\mathscr{S}(M)$ 表示 $\mathscr{S}^*(M)$ 的协合等价类所成的集合. 设 α 是一个光滑化，则用 $[\alpha]$ 记 α 的协合等价类.

设 V 是一个 PL 流形，M 是 V 的 PL 子流形. (V, M) 的一个线性化是一个 PD 向量丛 $\xi=(E, p, M)$，使得：(1) E 是 M 在 V 中的一个邻域；(2) p: $E\rightarrow M$ 是一个保核收缩；(3)

从 V 诱导的 E 上的 PL 结构与 ξ 相容．(V, M) 的所有线性化之集合记作 $\mathscr{L}^{\cdot}(V, M)$．$(V, M)$ 的两个线性化 $\xi_i=(E_i, p_i, M)$，$i=0, 1$，称为等价的，若存在 $(V\times I, M\times I)$ 的线性化 $\xi=(E, p, M\times I)$，使得对于 M 的某个邻域 $W\subset V$，$p(x, i)=(p_i(x), i)$，对于 $x\in(W\times i)\cap E$，$i=0, 1$．(V, M) 的线性化的等价类之集合记作 $\mathscr{L}(V, M)$．再由序列

$$\mathscr{L}(V,M)\rightarrow\mathscr{L}(V\times\mathbf{R},M\times 0)\rightarrow\cdots\rightarrow\mathscr{L}(V\times\mathbf{R}^q,M\times 0)\rightarrow\cdots,$$

其顺向极限为 (V, M) 的稳定线性化之集合，记作 $\mathscr{L}_s(V, M)$，并用 s：$\mathscr{L}(V, M)\rightarrow\mathscr{L}_s(V, M)$ 记自然映射．

特别，若 M 是一个无边的 PL 流形，记 $M_\triangle\subset M\times M$ 为对角线．则以下三个陈述是等价的：(a) M 是可光滑化的，(b) $\mathscr{L}(M\times M, M_\triangle)\neq\varnothing$，(c) $\mathscr{L}_s(M\times M, M_\triangle)\neq\varnothing$．进而对于无边 PL 流形 M 上的每一个光滑化 α，可定义 $(M\times M, M_\triangle)$ 上的一个线性化，且过渡到等价类的顺向极限，记作 Exp：$\mathscr{S}(M)\rightarrow\mathscr{L}(M\times M, M_\triangle)$，并证明了 Exp 是一个双射．

利用块丛 [Rou-S] 可将分类问题转化为同伦论．一个 q 维块丛 (q-block bundle) $\xi^q|K$ 由全空间 $E(\xi)$ 和复形 K 组成，使得 $|K|\subset E(\xi)$ 满足下述条件：

(i) 对于每个 n 维胞腔 $\sigma_i\in K$，存在一个 $(n+q)$ 维球体 $\beta_i\subset E(\xi)$，使得 $(\beta_i,\sigma_i)\cong(I^{n+q},I^n)$，其中 β_i 称为 σ_i 上的块；

(ii) $E(\xi)$ 是所有块的并集；

(iii) 块的内部是互不相交的；

(iv) 记 $L=\sigma_i\cap\sigma_j$，则 $\beta_i\cap\beta_j$ 是 L 的胞腔上的块的并集．

如果 V 是 PL 流形，M 是 V 的一个局部平坦子流形，则 M 在 V 中的一个正则邻域决定了 M 上的法块丛的一个同构类，此同构类与正则邻域的选取无关．

n 维块丛作为多面体范畴上的函子，是一个同伦函子，并且有分类空间 $B\widetilde{PL}(n)$，它可看作一个半单纯群 $\widetilde{PL}(n)$ 的分类空间．

对 PD 向量丛做三角剖分，便诱导一个映射 t_n：$BO(n) \to B\widetilde{PL}(n)$，它可看作一个以 $\widetilde{PL}(n)/O(n)$ 为纤维的纤维化. 设 f：$M \to B\widetilde{PL}(n)$ 是 M 在 V 中的法块丛的分类映射，则 (V, M) 的线性化的等价类一一对应于 f 到 t_n 上的提升 g：$M \to BO(n)$ 的同伦类.

将自然包含 $B\widetilde{PL}(n) \to B\widetilde{PL}(n+1)$ 过渡到顺向极限，得块丛的稳定等价类的分类空间，记作 $B\widetilde{PL}$. (V, M) 的稳定线性化的等价类一一对应于 f_s：$M \to B\widetilde{PL}$ 到 t：$BO \to B\widetilde{PL}$ 上的提升 g：$M \to BO$，其中 f_s 是 $M \xrightarrow{f} B\widetilde{PL}(n) \to B\widetilde{PL}$ 的合成，而 t 是 $\{t_n\}$ 的顺向极限. t 可看作一个纤维化，以 $\widetilde{PL}/O$ 为纤维.

对于一个无边的 PL 流形 M，设 f_M：$M \to B\widetilde{PL}$ 为 M_Δ 在 $M \times M$ 中的法块丛的分类映射. 设 $\mathscr{E}(M) \to M$ 为用 f_M 将 t：$BO \to B\widetilde{PL}$ 拉回的纤维化. 则 M 上的光滑化的协合等价类 $\mathscr{S}(M)$ 一一对应于以 $\widetilde{PL}/O$ 为纤维的丛 $\mathscr{E}(M) \to M$ 的截面的同伦类. 特别，若 M 是可光滑化的，则 M 上的光滑化的协合等价类 $\mathscr{S}(M)$ 一一对应于映射的同伦类集合 $[M, \widetilde{PL}/O]$.

§23.4 三角剖分与主猜测

直到 20 世纪 50 年代中期，拓扑流形的三角剖分与主猜测只对三维以下获得了证明（参见 §23.1）. 当 1956 年 Milnor 造出怪异 7 维球面后，再次对这些问题产生了强烈兴趣. Milnor 于

1959 年否定了对 6 维以上多面体的主猜测［Mi 9］，于是流形的主猜测格外引人注目. 不过，这个 6 维以上多面体的主猜测之否定，意味着 TOP/O 的第一个非平凡同伦群是 $\pi_3(TOP/O)=\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$，而那个 7 维怪异球面意味着第二个非平凡的是 $\pi_7(TOP/O)=\mathbf{Z}/28\mathbf{Z}$.

三角剖分与主猜测对 5 维以上流形的否定，是由 Kirby 和 Siebenmann 完成的. 许多数学家在这个解决过程中作出了贡献. 标志性的文献有［Ki 1］，［Ki-S 1，2，3］及其中引用的某些文献.

我们用 $CAT(n)$ 表示 $\mathbf{R}^n$ 的保持原点的 CAT 自同胚所成的半单纯群，其中 $CAT=TOP$，PL 或 $DIFF$. 而已知 $DIFF(n)\simeq GL(n)\simeq O(n)$. 我们还用 $BTOP(n)$，$BPL(n)$ 和 $BO(n)$ 分别表示对应的群的分类空间. 设给了 n 维的 TOP 流形 M，并设 M 的切微观丛 t_M 的分类映射是 f: $M\to BTOP(n)$. M 能否三角剖分为 PL 流形，取决于分类映射 f 能否提升到 $BPL(n)\to BTOP(n)$ 上，这是一个以 $TOP(n)/PL(n)$ 为纤维的纤维化. 一个基本事实是：对于 $n\geqslant 5$，稳定化映射 $s:\pi_k(TOP(n)/PL(n))\to\pi_k(TOP(n+1)/PL(n+1))$ 是同构，并且 $\pi_k(TOP(n)/PL(n))=\pi_k(TOP/PL)$ 为 0，当 $k\neq 3$ 时；且为 $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ 当 $k=3$ 时. 这里 TOP/PL 表示 $TOP(n)/PL(n)$ 的顺向极限. 因此 M 可三角剖分的阻碍落入上同调群 $H^4(M;\pi_3(TOP(n)/PL(n)))=H^4(M;\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ 中. 如果 $H^4(M;\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})=0$，则 M 上存在三角剖分，使它成为 PL 流形. 进而类似地有，假设 M 上已给了 PL 结构，则 M 上的 PL 结构的同痕类一一对应于上同调群 $H^3(M;\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$. 这些结果可以推广到带边流形及相对情形，在一般情形要求 $n\geqslant 6$.

总之，对流形的三角剖分与主猜测，当维数≥5 时是不成立的，而当维数≤3 时是成立的.

第二十四章　纽结理论

人类祖先在史前时期即用结绳记事.《周易》中就有“上古结绳而治”的记载. 打结也是一门实用技术，可以说人人都会一些. 绳结还是群众游戏的内容. 对于海员和大车把式，结绳是基本的专业技术. 而对于某些魔术杂耍师而言，绳结则是引人入胜的特技杂要手法的来源. 因此 19 世纪已有人对纽结作了大量的收集，整理和分类工作，著名的之一是英国人 P. G. Tait.

20 世纪初，随着组合拓扑学的建立，纽结便作为拓扑学的一个分支而发展成为一门数学，这就是所谓安放问题. 它可以推广到高维的余维为 2 的嵌入及分类问题. 但三维空间中的一维纽结最为重要和困难，并与三维流形理论有密切关联.

纽结理论直接的应用也不少，著名的有如 DNA 的三级结构（拓扑结构）的识别和拓扑异构酶的发现，应用了纽结理论中的 White 公式 [Whi]. 这是 20 世纪 60 年代末和 70 年代初的突破.

一个世纪来，许多人对纽结理论有过重要贡献. 前期主要有 Dehn，E. Artin，Alexander，Seifert 和 Reidemeister 等人，其中最重要的成果是 Alexander 多项式. 50 年代以 R. Fox 为主要代表，对前人的理论重建并推广. 60 年代末，J. Conway 有重要改进，提出了拆接理论. 80 年代则有 V. Jones 的重大突破，得到更强的不变量 Jones 多项式，并获得推广. 90 年代则提出了 V. A. Vassiliev 不变量并且出现了 M. L. Kontsevich 的重大贡献.

§24.1 19世纪末的情形

当拓扑学尚未形成时，打结早已为群众所熟悉．某些专业人员，特别是魔术师和海员，对绳结已有深入的了解．他们做过整理，常常在同业中传授，并成为某些人的绝技．

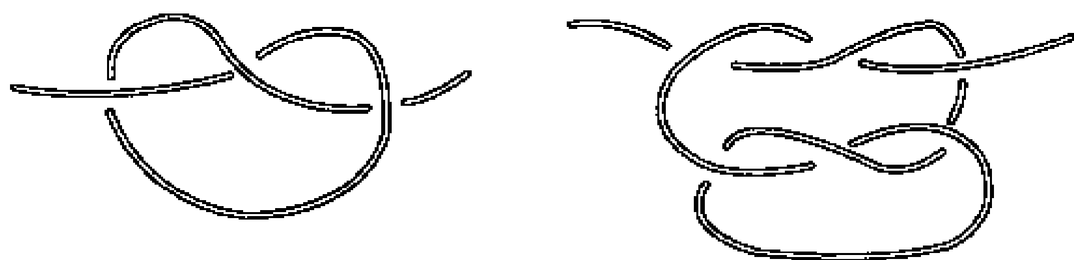
纽结作为科学而受到重视和研究，首先应当提到 Gauss．他对空间中两条闭环路之间的环绕数用积分来定义和计算，并应用于电磁学，意义深远，并被 Maxwell 采用（参见§1.5）．他并且影响 Listing 也研究过纽结．

英国的 Kelvin 勋爵，原名 W. Thomson，于 1867 年提出他的原子论．认为原子由“以太”中的涡旋圈构成，这些圈由于打结不同而形成不同的元素的原子．这个理论引起人们对纽结及其分类作为一门科学来进行研究．

直接受到 Kelvin 原子论影响，英国人 P. G. Tait [Ta] [Hos-Th-W] 整理了所搜集的纽结并加以分组．当时尚未形成拓扑学的精确分类观念，但已认定，当一个纽结可连续形变成为另一个时，两者便是等同的．Tait 不能确定他分的不同的组是否相互间肯定不等同．他还提出了一些猜测，直到 20 世纪 80 年代，应用新的不变量 Jones 多项式才得以解决（见§24.9）．

§24.2 一些基本概念

人们在实践上所打的“结”通常如：



我们认为它们是“结”，是因为人们约定不允许将绳头从“结”中缩回去，否则便都“解开”了．因此，为讨论方便起见，我们假设两个绳头是连接好的，即它是空间中的一条简单闭曲线．于是我们引进下面的正式定义．

A．纽结与纽结型

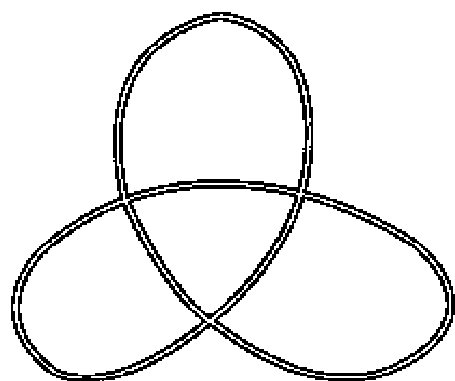
圆周 S^1 在三维空间 $\mathbf{R}^3$ 中的一个嵌入或嵌入的像称为一个纽结（knot）．由于 $\mathbf{R}^3$ 的一点紧化就是 S^3，或说 $S^3=\mathbf{R}^3\cup\infty$，上面定义中的 $\mathbf{R}^3$ 也可换成 S^3，今后这两者可随意互换．$\mathbf{R}^3$ 中两个纽结 K_1，K_2 称为是等价的（equivalent）或同痕的（isotopic)，若存在 $\mathbf{R}^3$ 到自身的保向同胚的连续族 h_t，使得 $h_0=$ 恒等且 $h_1|K_1$ 是一个从 K_1 到 K_2 的同胚．按此等价关系，$\mathbf{R}^3$ 中的所有的纽结被分成了等价类或纽结型（knot types)．例如，在 $\mathbf{R}^3$ 中取定笛卡尔坐标（x，y，z)，$\mathbf{R}^3$ 中等价于 $x^2+y^2=1$，$z=0$的纽结的型称为平凡的（trivial 或 unknotted)．

逐渐人们发现，若不加其他限制，则有些（其实是绝大多数！）纽结是很复杂的．我们称等价于 $\mathbf{R}^3$ 中的一个多边形（即闭折线）的纽结是驯顺的（tame)，其余的便称为野性的（wild)．光滑的纽结必是驯顺的．今后，我们只限于研究驯顺的纽结的分类．为了方便，可以认为所论及的纽结为多边形的或光滑的．

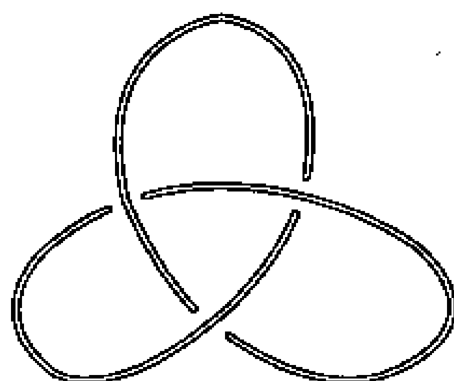
B．投影图

为了便于图示和讨论，采用下面做法．设给定 $\mathbf{R}^3$ 中一个多边形纽结 K，便存在 $\mathbf{R}^3$ 中一个平面 P 及到此平面的一个正交投射 π，使得有下列性质：(1) 投射像 $\pi(K)$ 除有限个二重点外无其他重点；(2) K 之顶点的像不是 $\pi(K)$ 中的二重点．则$\pi(K)$

称为纽结 K 的一个正则投影（regular projection）. $\pi(K)$ 的每个二重点呈 X 状，称为 $\pi(K)$ 的一个交叉（crossing）. 设平面 P 为 $z=0$ 平面，则 $\pi(K)$ 中每个二重点在 K 中的两个原像中，z 坐标大者称为上行的（overcrossing），小者称为下行的（undercrossing）. 我们将 P 中 $\pi(K)$ 的每个二重点处的下行线段在该二重点处断开，所得图称为 K 的一个正则投影图（diagram）. 稍有看图经验的人均可从 K 的一个正则投影图来认识纽结 K，它正是你的眼睛从 z 轴坐标充分大的位置上向平面 P 望去时所看到的纽结 K.



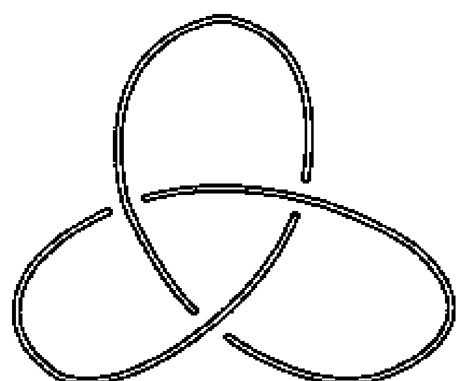
正则投影



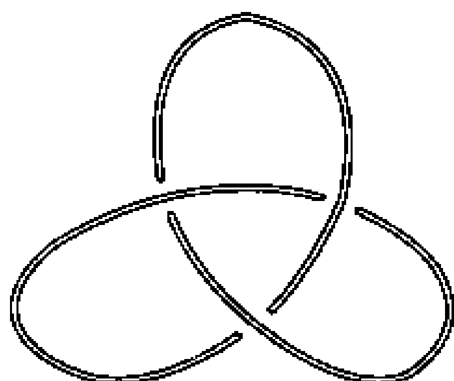
正则投影图

C. 手征性

有些纽结有某种对称性. 我们研究的分两种. 一种是手征性(achirality). 若存在 $\mathbf{R}^3$ 的一个反向同胚将 K 映为自己，即纽结

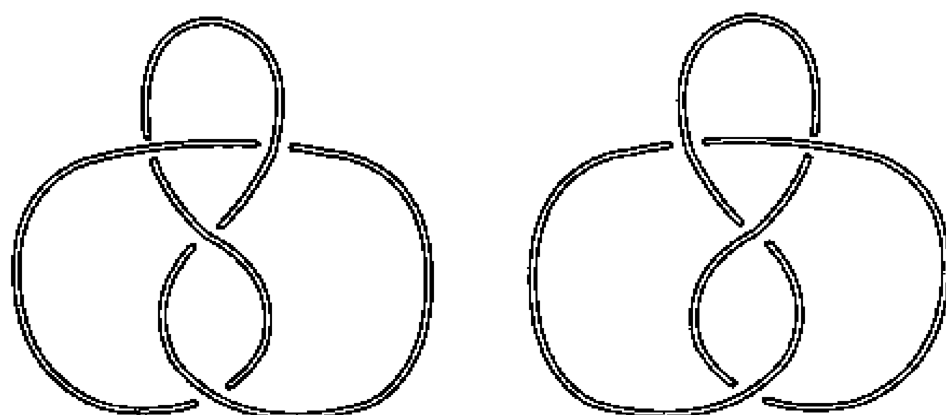


左手三叶结



右手三叶结

K 与自己的镜面像等价，则称纽结 K 是无手征的（achiral 或 amphicheiral）．这是 Listing 在 1847 年就注意到的事实，并建议用 amphicheiral 的说法．否则便称纽结 K 是有手征的（chiral 或 non-amphicheiral）．例如，左手三叶结和右手三叶结互为镜面像，但它们是不等价的，因此是有手征的．不过这个事实的证明不容易，下一节及以后还将论及．而 8 字结与其镜面像是等价的，即是无手征的，读者可自己做实验．

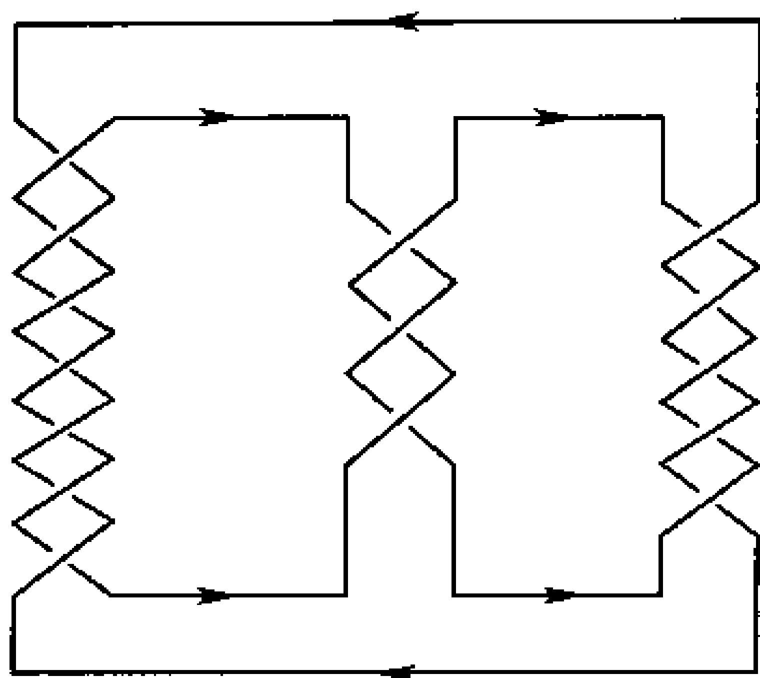


关于手征性的最新研究，读者可参考姜伯驹等人的文章 [Jia-L-W-W] 及 [Jia-W]．

D．逆向性

另一种对称性是逆向性．纽结 K 给了定向后称为有向的．$\mathbf{R}^3$ 中的一个有向纽结 K 与其反向纽结 $-K$ 若是同痕的，则称纽结 K 是可逆向的（invertible），否则纽结 K 称为不可逆向的（non-invertible）．三叶结和 8 字结都是可逆向的．

不可逆向的纽结的存在性直到 1963 年才由 H. F. Trotter [Tr] 得到．他得到无穷多的一族不可逆向的纽结，它们都是麻花纽结（pretzel knots），记作 $K(p, q, r)$，其中最简单的是 $K(7, 3, 5)$．如下图：



E. 交错性

利用投影图可以定义某些纽结的交错性．这是 Tait 及他以前的人就注意到的．设 K 是一个纽结，$\widetilde{K}$ 是它的一个正则投影图．如果沿 K 的某规定的方向前进时，上下行交错出现，则称 K 的这个投影图是交错的（alternating）．一个纽结型称为是交错的，如果它有一个代表纽结具有一个交错的投影图．

Tait 并不是按投影图的交叉数来分类纽结而造表的第一人．因为 Gauss 和 Listing[Lis] 就在 1847 年左右做过．文献中还可查到有 T. P. Kirkman[Kir] 和 C. N. Little[Lit] 的表．Tait 1898 年的表，对于给定的交叉数，罗列出所有投影图并按代表相同纽结而归组．但他说："我无法绝对肯定所有这些组互相之间是本质上不相同的"[Hos-T-W][Li]．这是因为当时尚无拓扑学的定理可资应用．因此，构作纽结不变量便成为纽结理论的中心任务．Tait 在造表时还提出若干经验的规律，但在差不多一个世纪长的时期内无法获得证明，我们将在 §24.9 中再来讨论．

F. 链环

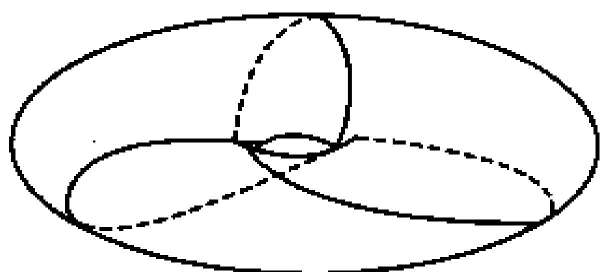
我们将纽结概念推广为链环．$\mathbf{R}^3$ 中的一个链环（link）是 $\mathbf{R}^3$ 中互不相交的有限个纽结的全体．其中每个纽结称为该链环

的一个分支（component），而前面说的一个纽结可以认为是分支数为 1 的链环. 以上介绍的种种概念均可对链环界定，此处不赘.

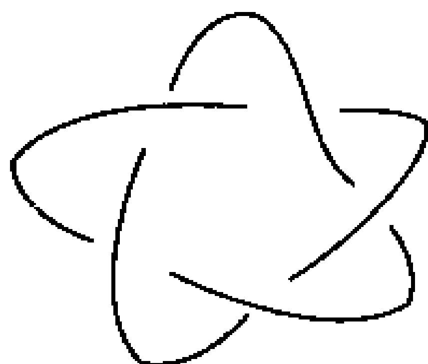
此外，有些书附了纽结和链环表，采用了通用的编号，如［Bur-Z］，［Rol］，［Kau 4］中的 3_1，7_4 及 8_6^2 等.

G. 环面纽结

有一类特殊的纽结称为环面纽结（torus knot），定义如下. 我们称 $\mathbf{R}^3$ 或 $S^3=\mathbf{R}^3\cup\infty$ 中的 $S^1\times D^2$ 为标准实心环（standard solid torus）. 位于标准实心环表面上的一个绕纬线方向 p 次而绕经线方向 q 次的纽结，记作 $T_{p,q}$，称为一个（p，q）型的环面纽结（torus knot of type(p，q)）. 如三叶结就是一个 $T_{2,3}$.



下图中的 $T_{2,5}$ 又称 Solomon 纽结.



O. Schreier 于 1923 年［Schr 1］对环面纽结进行过研究，他证明，设 $1<p<q$ 且 p 与 q 互素，对不同的（p，q），$T_{p,q}$ 是不等价的.

§ 24.3 再一些基本概念

A. 纽结补

设 K 是 $\mathbf{R}^3$ 或 S^3 中的一个纽结，则 $\mathbf{R}^3 \setminus K$ 或 $S^3 \setminus K$ 称为纽结 K 的纽结补（knot complement）. 设 S^3 中两个纽结 K 和 K' 是等价的，则 $S^3 \setminus K$ 与 $S^3 \setminus K'$ 保向同胚. 因此，纽结补在同胚意义之下是纽结 K 的同痕不变量. 于是自然有如下猜测.

纽结补猜测 S^3 中两个纽结的纽结补若有保向同胚，则这两个纽结是等价的.

这个猜测通常被说成，纽结被纽结补决定. 它于 1989 年由 C. Gordon 和 J. Luecke [Gor-L] 证明. 但若把其中的 S^3 换成一个一般的三维流形 Y^3，则可能纽结并不被纽结补所决定，Mathieu（1990）[D-M]，[Mat] 和荣用武（1993）[Ron] 举出了例子.

B. 连通和

S^3 中两个纽结 K_1 和 K_2 可作连通和如下. 我们认为两个纽结分别为（S^3，K_1）和（S^3，K_2），这里的两个 S^3 是 S^3 的两个不同的拷贝. 对 $i=1，2$，在 K_i 上取一点 p_i 为中心挖去一个开球体 $\mathring{B}_i^3$ 使 $B_i^3 \cap K_i = B_i^1$ 为一闭线段，作连通和

$$(S^3 \setminus \mathring{B}_1^3) \cup (S^3 \setminus \mathring{B}_2^3) \cong S^3$$

时使 $K_1 \setminus \mathring{B}_1^1$ 与 $K_2 \setminus \mathring{B}_2^1$ 粘合，记作 $K_1 \# K_2$，得

$$(S^3, K_1 \# K_2),$$

称为（S^3，K_1）和（S^3，K_2）或 K_1 和 K_2 的连通和（connected sum），记作

$$(S^3, K_1 \# K_3) = (S^3, K_1) \# (S^3, K_1).$$

也可以这样看，设 S^3 被一个球面或平面分成两个区域，并设 K_1，K_2 是 S^3 中位于不同区域的两个纽结．对 $i=1$，2，在 K_i 上取点 p_i，用一条窄带子从 K_1 的 p_1 邻近一区间连接到 K_2 的 p_2 邻近的一区间，忽略带子内部只留下两条边，则这两条边已把 K_1 和 K_2 各切去一小段的其余部分连成一个整体，而得一新的纽结，记作 $K_1 \# K_2$．有些文献称连通和为复合（composition）或乘积（product）．连通和亦可对链环定义．

若非平凡纽结 K，当表成连通和 $K = K_1 \# K_2$ 时，其中必有一个 K_i 为平凡纽结，则纽结 K 称为一个素（prime）纽结．可以证明，若两个纽结 K_1 和 K_2 的连通和是平凡的，则 K_1 和 K_2 都是平凡的．这就告诉我们，用连通和的办法是无法解结的．还可以证明，每个非平凡纽结可表为素纽结之连通知，若不论顺序，则表示是唯一的［Bur-Z］．

C．交叉数

设 K 是 $\mathbf{R}^3$ 中一个纽结，$\pi(K)$ 是 K 的一个正则投影，$\pi(K)$的二重点的个数称为 $\pi(K)$ 的交叉数．K 的正则投影中交叉数的最小者，记为 $c(K)$，称为纽结 K 的交叉数（crossing number）．

交叉数猜测 $c(K_1 \# K_2) = c(K_1) + c(K_2)$．

若$c(K)<3$,则 K 为平凡结．

D．解结数

设 K 是 $\mathbf{R}^3$ 中一个纽结，$\widetilde{K}$ 是 K 的一个正则投影图．若改变 $\widetilde{K}$ 中 n 个上下行，即做 n 个穿越（switching），使其解结，而改变少于 n 个上下行便不能解结，则记 n 为 $u(\widetilde{K})$，称为 K 的正则投影图 $\widetilde{K}$ 的解结数．纽结 K 的正则投影图的解结数中的最小者记为 $u(K)$，称为纽结 K 的解结数（unknotting number）．

解结数猜测 $u(K_1 \# K_2) = u(K_1) + u(K_2)$．

可以证明$u(K) \leqslant c(K) - 2$．一般说来 $u(K)$的计算很困难，

即使对于一些具体的个别例子都很不容易．例如对纽结 7_4，直到 1985 年［Lic 2］才解决．Scharlemann 也在 1985 年［Sc］证明，一个纽结 K 的 $u(K)=1$ 当且仅当 K 是素的．这告诉我们，任何非素的不平凡的纽结不可用一次穿越而解结．

E．桥数

在纽结 K 的一个正则投影图中，被下行点切成的线段称为桥（bridge），其数目对 K 的所有正则投影图而言最小者，记为 $b(K)$，称为纽结 K 的桥数(bridge number)．纽结 K 的 $b(K)=1$，当且仅当 K 是平凡结．桥数 $b(K)=2$ 的纽结于 1956 年被 H. Schubert［Schu′］分类．他还得到公式

$$b(K_1 \# K_2)=b(K_1)+b(K_2)-1,$$

它可以改写为

$$b(K_1 \# K_2)-1=(b(K_1)-1)+(b(K_2)-1),$$

即函数 $b-1$ 有可加性．由此还知二桥纽结是素的．然而三桥纽结的分类至今尚未完成．

F．全曲率

$\mathbf{R}^3$ 中一个纽结 K 作为空间折线，在各顶点的外角之和称为 K 的全曲率（total curvature），记作 $k(K)$．若 K 是光滑的，则可表作积分

$$k(K)=\int_k |x''(s)|\,ds,$$

其中 s 为弧长参数．Fary［F 1］1949 年和 Milnor［Mi 1］1950 年证明，若 K 不是平凡结，则 $k(K)>4\pi$．

G．绞拧数

设 K 是 $\mathbf{R}^3$ 中的一个有向纽结，$\widetilde{K}$ 是 K 的一个正则投影图．对 $\widetilde{K}$ 的每个交叉点，定义该点的符号为 ε（╳）$=+1$，ε（╳）$=-1$．这与定向之选取无关．这些数的和记为 $w(\widetilde{K})$，依赖于投影图 $\widetilde{K}$ 的选取，称为 K 的投影图 $\widetilde{K}$ 的绞拧数

(writhe).

H．扭转数

设有一条封闭的双侧的窄带子，其两条边有相同定向．设这个二分支的链环的有向投影图 $\widetilde{K}$ 中当两平行曲线呈 则为正扭转一周，呈 则为负扭转一周．这种扭转周数总和记为 $T(\widetilde{K})$，称为投影图 $\widetilde{K}$ 的扭转数（twist）.

I．环绕数

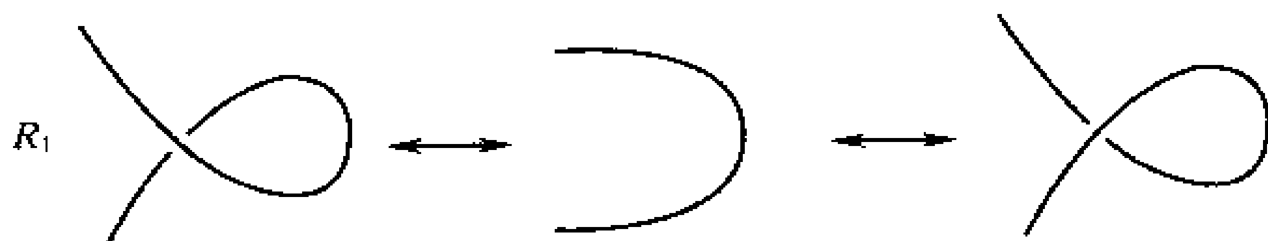
设 $L=K_1\sqcup K_2$ 是 $\mathbf{R}^3$ 中的一个二分支链环．给了 K_1 和 K_2 上的定向．我们定义 K_1 与 K_2 的环绕数（linking number）$lk(L)=lk(K_1,K_2)$ 为 L 的正则投影图中 K_1 与 K_2 交叉处的正负号总和的一半．这是一个同痕不变量，因此是链环型的不变量．当假设 K_1 和 K_2 是光滑的空间曲线时，设 $(x_1,y_1,z_1)\in K_1$，$(x_2,y_2,z_2)\in K_2$，Gauss 曾利用积分定义

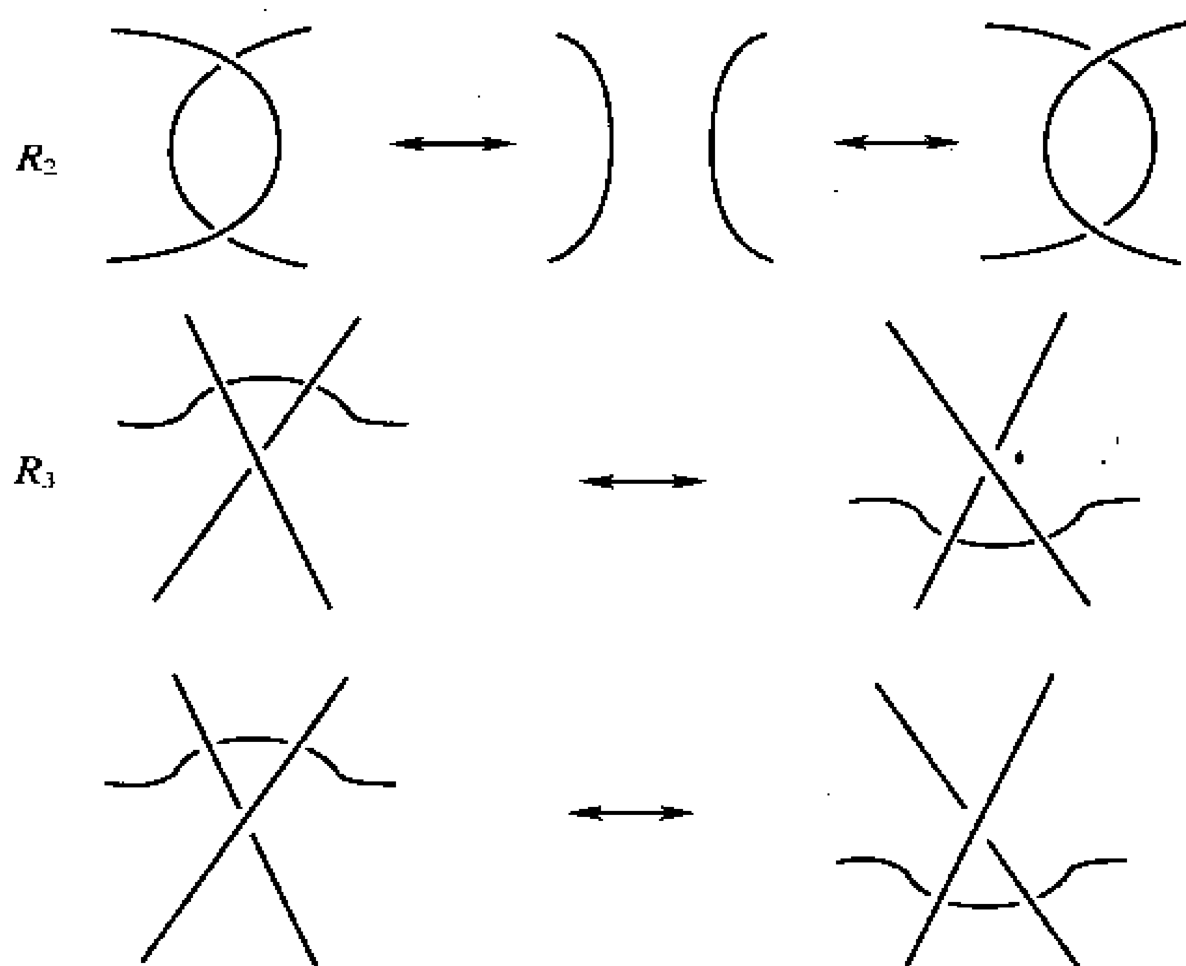
$$lk(K_1,K_2)=\frac{1}{4\pi}\int_{K_1}\int_{K_2}\frac{(x_2-x_1)(\mathrm{d}y_1\mathrm{d}z_2-\mathrm{d}z_1\mathrm{d}y_2)+(y_2-y_1)(\mathrm{d}z_1\mathrm{d}x_2-\mathrm{d}x_1\mathrm{d}z_2)+(z_2-z_1)(\mathrm{d}x_1\mathrm{d}y_2-\mathrm{d}y_1\mathrm{d}x_2)}{[(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2]^{3/2}}$$

这个事实如今已被称为 Gauss 定理了，如［Li］.

J．Reidemeister 变换

德国数学家 Reidemeister 于 20 世纪 20 年代研究纽结，并于 1932 年撰写了纽结论的专著［Rei 2］．他提出，纽结和链环的同痕可用正则投影图中的三种基本变换来处理，文献中称为 Reidemeister 变换（Reidemeister moves），并分别记作 R_1，R_2 和 R_3．如下图．



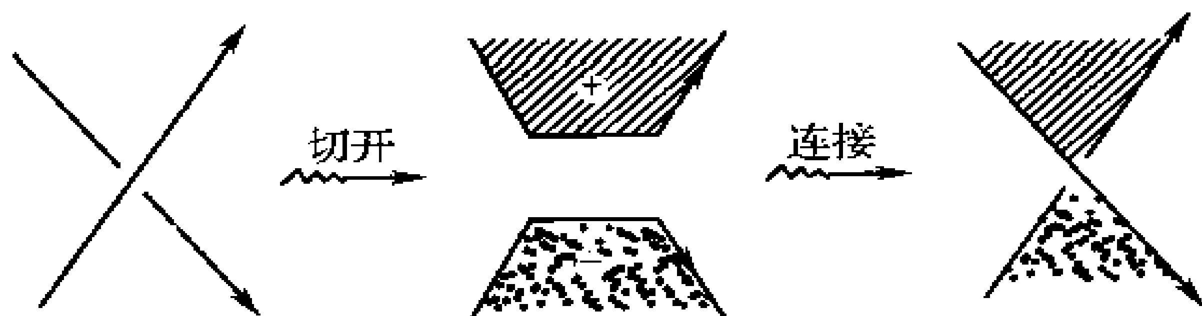


K. Seifert 曲面与亏格

Seifert 于 1934 年［Se 3］引进纽结的亏格概念，他利用由纽结所张的曲面，现已通称为 Seifert 曲面，提供了一个基本的几何方法．我们将 Seifert 曲面的定义写在下面的定理里．

Seifert 曲面存在定理 $\mathbf{R}^3$ 或 S^3 中每个链环 L 均界 $\mathbf{R}^3$ 或 S^3 中的一个可定向的紧的曲面．

这个曲面称为 L 的一个 Seifert 曲面（Seifert surface for L）．这个定理的证明提供了 Seifert 曲面的构作如下．取 L 的一个正则投影图．对 L 的每个分支取定向．然后将每个交叉切开，改箭头之交叉为箭头之“短路”．于是得投影平面 P 上若干个互不相交的有向简单闭曲线．每个这种简单闭曲线按 Jordan 曲线定理和 Schönflies 定理，界平面中的一个拓扑圆盘．但这些圆盘中可能有些落在另外的圆盘的内部．我们从最内部的圆盘开始将其



向平面 P 外一个一个地推出去，使这些圆盘互不相交．再给每个这种圆盘，按周界之定向，依逆时针规则记其定向为 + 或 − ．最后，将这些圆盘在原来的每个交叉点处连接一条半扭转的带子，便得到一个可定向的（已定向的）紧的曲面，其边缘就是带有给定的定向的链环 L ．

链环 L 的 Seifert 曲面很多，它们中最小的亏格称为链环 L 的亏格（genus）．它是链环型的不变量，这由等价的定义可得．

§ 24.4　纽结群和 Wirtinger 表出

随着组合拓扑学的建立，20 世纪初也开始了纽结的严格理论发展过程．但这是一个艰难的过程．

一般说来，若有一个办法能对每个纽结或链环 L 对应某范畴中的一个对象 $\mathscr{F}(L)$，满足若 L' 是另一个链环，使得 $L' \sim L$ 时 $\mathscr{F}(L') = \mathscr{F}(L)$，则 $\mathscr{F}$ 称为一个纽结或链环不变量．但请注意，当你发现 $\mathscr{F}(L') = \mathscr{F}(L)$ 时，你什么结论也得不到，它的功效只在当你发现 $\mathscr{F}(L') \neq \mathscr{F}(L)$ 时，便得知 $L' \nsim L$．这里及以后 ~ 表示纽结或链环之间的等价．

第一个被采用的组合拓扑学或代数拓扑学的不变量，是基本群．

设 $\mathbf{R}^3$ 中的两个纽结 K 与 K' 等价，则两个纽结补 $\mathbf{R}^3 \setminus K$ 与

$\mathbf{R}^3 \setminus K'$同胚．因此由 $\mathbf{R}^3 \setminus K$ 派生的拓扑不变量均为 K 的纽结不变量，如 $\mathbf{R}^3 \setminus K$ 的各维同调和基本群．我们不难证明，$\mathbf{R}^3 \setminus K$ 的各维同调没有用处，只有基本群$\pi_1(\mathbf{R}^3 \setminus K)$可用来区别纽结．这是 Dehn ［D 1］ 首先采用的，它被称为纽结 K 的纽结群（knot group）．例如，平凡纽结的纽结群是无限循环群，若能证明纽结 K 的纽结群不是无限循环群，则可断言 K 不是平凡纽结．

但要想应用纽结群，先要能将它表出．下面将介绍著名的 Wirtinger 表出．按 ［Bur-Z］ 中 47 页的说法，W．Wirtinger 在美朗举行的德国数学会 1905 年会上的题为“论二变量函数的分支（Über die Verzweigung bei Funktionen von zwei Veränderlichen)”的讲演中提出纽结群的表出，而按 ［Stil］ 中 144 页的说法，Wirtinger 表出是于 1904 年左右在维也纳的讲演中引进，而未能广为传播，后于 1908 年由 Tietze 在 ［Ti］ 中发表．

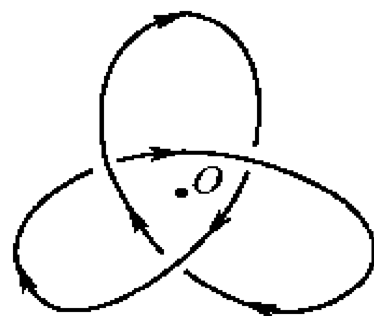
设 K 是 $\mathbf{R}^3$ 中一个给定的纽结，设$\pi(K)$是 K 的一个正则投影，它有 n 个二重点．于是 K 的投影图 $\widetilde{K}$ 由 n 个下行点切断为 n 个上行弧段$z_i(i=1,2,\cdots,n)$的组合，下行点即为切断言．取由 n 个字母 x_1，…，x_n 生成的自由群F_n．对于 $\widetilde{K}$ 的第 i 个交叉点，设第 i 个下行点分开的弧段为 z_λ，$z_{\lambda+1}$，且其上行弧段为 z_μ，它跨过复合弧段 $z_\lambda z_{\lambda+1}$．则构作一个 F_n 中的字 $r_i = x_{\lambda+1}^{-1} x_\mu^{e_i} x_\lambda x_\mu^{-e_i}$，其中 $e_i = \pm 1$ 为第 i 个二重点的符号．取 N 是 F_n 中含有 r_1，…，r_n 的最小正规子群，于是商群F_n/N 是 $G=\langle x_1, \cdots, x_n; r_1, \cdots, r_n\rangle$．基本结论是，群 G 同构于纽结 K 的纽结群；记号中的 r_i 对应于关系 $1 = x_{\lambda+1}^{-1} x_\mu^{e_i} x_\lambda x_\mu^{-e_i}$，并且这 n 个关系中的每一个可由其余的关系推出，因此可以少写一个，即纽结 K 的纽结群可表出为$G=\langle x_1, \cdots, x_n; r_1, \cdots, r_{n-1}\rangle$，这称为纽结群的 Wirtinger 表出（Wirtinger presentation）．关于其证明读者可参考［Bur-Z］，［Cr-F］，［Rol］或［Stil］．

例如，左右三叶结的纽结群均可表出写作 $\langle x, y, z; x^{-1}yzy^{-1}, y^{-1}zxz^{-1}\rangle$. 若将三个关系都列出，得 $\langle x, y, z; x = yzy^{-1}, y = zxz^{-1}, z = xyx^{-1}\rangle$. 将其中 $z = xyx^{-1}$ 代入其他两个关系，便得 $\langle x, y; x = yxyx^{-1}y^{-1}, y = xyxy^{-1}x^{-1}\rangle$. 这里的两个关系实际一样，故得 $\langle x, y; xyx = yxy\rangle$. 可以证明它不是一个阿贝尔群(参见[Cr-F]或[Stil])，因此它不同构于无限循环群，从而知三叶结不可解结，即不是平凡纽结.

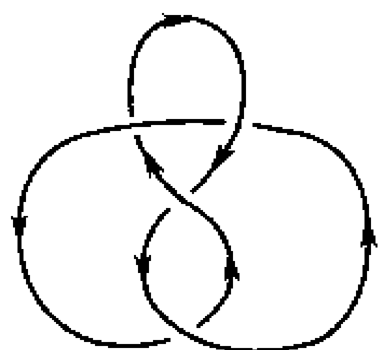
但左右三叶结互为镜面像，它们的纽结群的 Wirtinger 表出分别为 $\langle x, y, z; zx^{-1}yx, xy^{-1}zy, yz^{-1}xz\rangle$ 和 $\langle x, y, z; xzyz^{-1}, yxzx^{-1}, zyxy^{-1}\rangle$，它们是同一个群. 因此，它不能用来区别左右三叶结. 实验告诉我们，我们从左三叶结不能同痕地变到右三叶结，但这不是证明. Dehn 于 1914 年在 [D 3] 中利用纽结群的自同构，证明了左右三叶结是不等价的，这个证明读者可以在 [Stil] 中找到. 运用 §24.9 中的 Jones 多项式可得另一证明.

§24.5 辫子和辫群

Alexander 在 1923 年的文章 [Al 5] 中就发现每个纽结型都有一个确定的法式，称为闭辫 (closed braid). 纽结 K 说是具有闭辫形式，如果存在一条直线 L 为轴，使得当 K 的点 p 沿一确定方向前进时，从 L 到点 p 的向量必按一确定方式绕轴 L 旋转. 于是可作 K 之投影图使直线 L 在图上用一点 O 来表示，如右图示的三叶结. 通常的 8 字结的投影图不是闭辫，但可以取到闭辫，如下页图.



Alexander 证明了任意纽结或链环均有闭辫形式. 这一事实与 19 世纪的一个结果有关，H. Brunn1897



不是闭辫
的8字结图

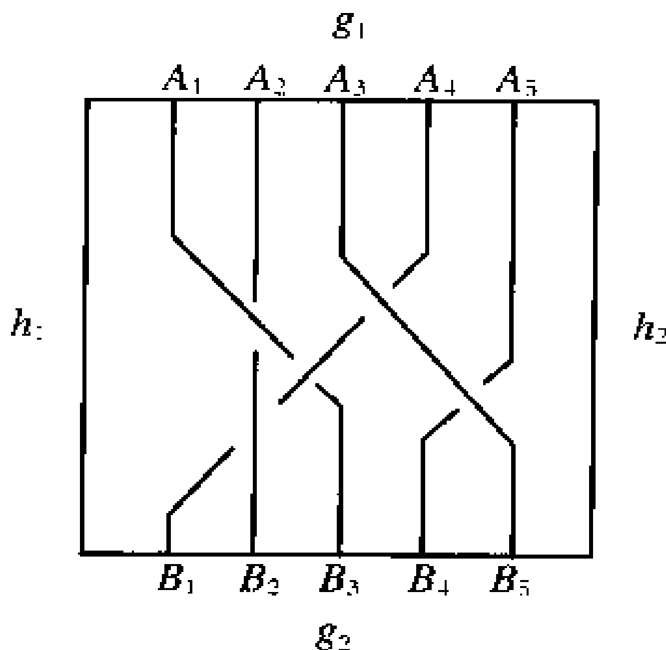


是闭辫的
8字结图

年［Br］证明：任意纽结有一个只具有单个多重点的投影．读者可在［Stil］中找到这个 Alexander 定理的证明．于是纽结或链环的等价便化为闭辫的等价．

奥地利人 E．Artin 是又一位抽象代数的奠基人，他于 1926 年发表辫子理论［Ar 1］，建立了辫群，研究了其生成元和关系，并研究其中的字问题．

在 $\mathbf{R}^3$ 的固定平面 P 中取一个矩形，上下两边分别为 g_1 和 g_2，左右两边分别为 h_1 和 h_2．设在 g_1 上有 n 个点 A_1，A_2，…，A_n，在 g_2 上有 n 个点 B_1，B_2，…，B_n，使 A_i 与 B_i 在相对位置上．设 $\mathbf{R}^3$ 中有 n 条互不相交的简单折线 l_1，l_2，…，l_n，每条 l_i 从 A_i 出发终止于 B_{k_i}，且当 $i\neq j$ 时，$k_i\neq k_j$；并且每一与 h_1 和 h_2 垂直而介于 g_1 和 g_2 之间的平面与每条 l_i 恰相交于一个点；l_1，l_2，…，l_n 在平面 P 上的正交投影 l_1'，l_2'，…，l_n' 均落在该矩形内，且当 $i\neq j$ 时 l_i' 与 l_j' 只有有限个非顶点的二重交

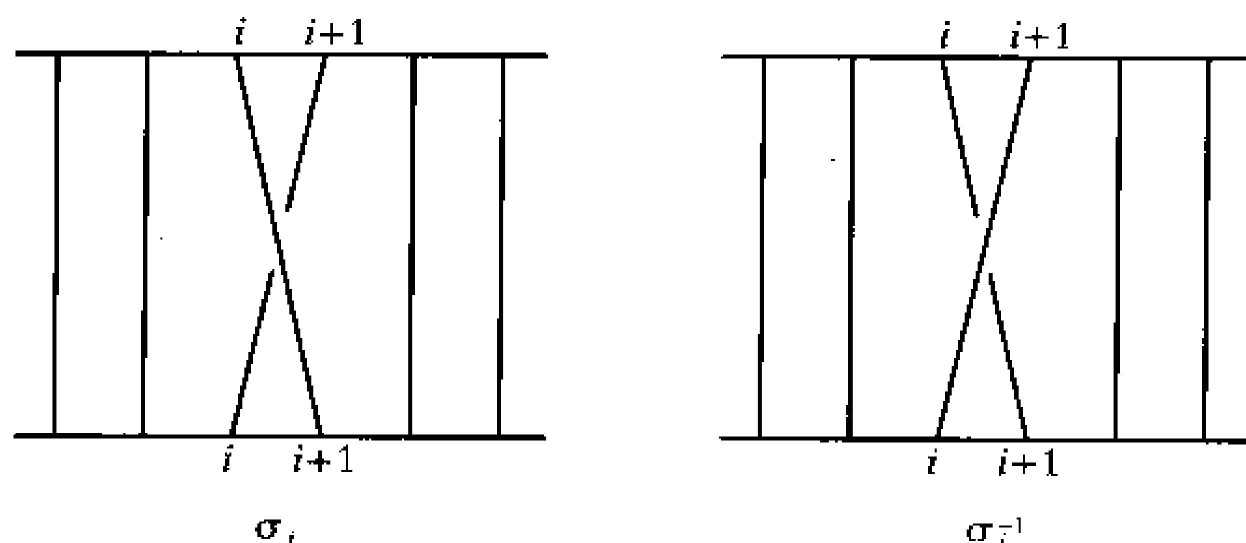


点．这样的一个图称为一个 n 阶的辫子（braid），可图示如上．

若再将该矩形上下边上的每一对点 A_i 和 B_i 用互相平行的 $\wedge$ 形折线连接，或者认为 A_i 与 B_i 等置，便得到一个闭辫．因此纽结等价问题可化为辫子的等价问题．

两个辫子 Z_1 和 Z_2 称为等价的或同痕的，若存在 $\mathbf{R}^3$ 到自身的同胚，使得在包含 Z_1 和 Z_2 在内的一个球面之外为恒等，且将 Z_1 映成 Z_2．

两个 n 阶的辫子 Z_1 和 Z_2 的乘积 Z_1Z_2 定义为将 Z_1 的下底上的点与 Z_2 的上底上的点对应等置，过渡到等价类得等价类的乘积 $[Z_1][Z_2]=[Z_1Z_2]$．所有 n 阶的辫子的等价类按此乘法成为一个群 $\mathscr{B}_n$，称为 n 阶辫群（braid group of order n）．令辫子 σ_i 及 σ_i^{-1}，$i=1$，…，$n-1$ 分别为如图



σ_i σ_i^{-1}

则 $\mathscr{B}_n$ 由 σ_1，…，σ_{n-1} 生成，关系子为 $r_{ij}=\sigma_i^{-1}\sigma_j^{-1}\sigma_i\sigma_j$ 当 $|i-j|\geqslant 2$ 时，$r_{ij}=\sigma_i^{-1}\sigma_j^{-1}\sigma_i^{-1}\sigma_j\sigma_i\sigma_j$ 当 $|i-j|=1$ 时．

Artin 在［Ar 1］中得到辫群 $\mathscr{B}_n$ 和它的表出后，还给出了 $\mathscr{B}_n$ 中字问题的一个解答．但其中的推理借助直观，不令人满意．1947 年 Artin 又写了一篇文章［Ar 2］，给出了完全严格的一套理论．另外据［Li］说，Artin 发明辫群理论的目的之一，是为了纺织业的需要．同时 F. Bohnenblust［Boh］由代数的分析出发得到 Artin 的主要结果而称为代数辫群．接着于 1948 年，周

炜良［Cho］得到代数辫群的更简单的处理，并确定了它的中心．关于辫群论读者可参考［Bir］或［Li］．

§24.6 Dehn 手术和分支复叠

纽结理论与3维流形关系密切，下面将介绍两个问题．第一个是，从 S^3 沿其中的一个链环施行 Dehn 手术以构作三维流形；第二个是，三维流形可看作 S^3 的沿某个链环的分支复叠空间．

A．Dehn 手术

Dehn 于1910年［Dl］中引进了一种挖补的手术，作为构作新的3维流形的一种基本技术．

设(a) M 是一个三维流形，可能有边；(b) $L = L_1 \cup \cdots \cup L_n$ 是 M 的内部 $\mathring{M}$ 中的一个 n 分支链环，每个 L_i 是 L 的一个分支；(c) N_i 是 L_i 在 $\mathring{M}$ 中的互不相交的管状邻域，因而每个 N_i 同胚于一个实心环；(d) 在每个 ∂N_i 上指定一条简单闭曲线 J_i．于是构作新流形 M' 如下：

$$M' = (M \setminus (\mathring{N}_1 \cup \cdots \cup \mathring{N}_n)) \bigcup_h (N_1 \cup \cdots \cup N_n),$$

其中“∘”表内部，$h = h_1 \cup \cdots \cup h_n$，每个 h_i 是一个将 ∂N_i 映成 ∂N_i 的同胚，使将 N_i 中的一条取定的经线 μ_i 映成 J_i．可以证明，M' 的同胚型不依赖于 h 的选取，而被(a)～(d)完全确定．三维流形 M' 称为是对流形 M 沿链环 L 按指令(d)施行了一个 Dehn 手术（Dehn surgery）而得．

如果 M 取成 S^3，则指令(d)可数字化而用有理数表述如下．我们先介绍实心环的经线与纬线．设 V 同胚于 $\mathbf{R}^3$ 中的标准的实心环 $S^1 \times D^2$，则我们说 V 是一个实心环（solid torus）．V 的边缘 ∂V 上的一条简单闭曲线称为 V 的一条经线（meridian），若它

在 V 中界一个圆盘. 这种曲线虽然很多, 但在 V 的同痕之下是唯一的. 不难证明一条经线必可表成$h(1\times\partial D^2)$, 其中 h: $S^1\times D^2\to V$ 是一个同胚. ∂V 上的一条简单闭曲线称为 V 的一条纬线 (latitude), 若它可表成$h(S^1\times 1)$, 其中 h: $S^1\times D^2\to V$ 是一个同胚, 一条纬线与每一条经线恰相交于一点; 但 V 的纬线在 V 的同痕之下不是唯一的, 有无限多个同痕等价类, 它们每一个的地位是平等的.

注: 经线和纬线二词在 Seifert-Threlfall 的 [Se-T 2] 中, 分别采用的德文是 Meridiankreis 和 Breitenkreis, 翻译成中文正是经线和纬线. 英文文献中经线均写成 meridian. 但不知何故, 我手头的大多数英文书, 如 [Bur-Z], [Cr-F], [Rol], 和许多英文写的论文中, 纬线被写成英文字 longitude. 经查字典, 这个英文字的意思还是经度. 甚至 [Se-T 2] 的英文翻译本 [Se-T 2′]: H. Seifert and W. Threlfall, A Textbook of Topology, 由 M. A. Goldman 翻译, Academic Press 1980 出版, 也将纬线译成为 longitude. 以讹传讹, 以至如此, 确颇感纳闷. 所幸, 发现另一本具有特色的英文教材, 澳大利亚人 J. Stillwell 的 [Stil], 其中采用的是 latitude, 这是真的英文的纬度一词. 希望 latitude 能够流行以至取代 longitude.

设 V 是嵌入S^3 中的一个实心环, 并设 $X=S^3\setminus\mathring{V}$, 它是一个带边流形, 其边缘为$\partial X=\partial V$. 在这个情形, V 的纬线中有一些在X 中同调于零, 这些纬线被称为首选纬线 (prefferred latitudes). 可以证明它们互相都同痕, 即首选纬线在同痕之下是唯一的. 与此对应, 一个同胚 h: $S^1\times D^2\to V$, 使得$h(S^1\times 1)$是一条首选纬线时, 则此同胚 h 称为是首选的 (prefferred). 习惯上把从标准实心环 $S^1\times D^2$ 到给定的实心环 V 的一个同胚称为 V 的一个标架化 (framing), 上述首选的同胚便称为 V 的一个首选的标架化 (prefferred framing).

现在设 L 是S^3 中给定的有向链环. 取 L 的每个分支L_i 在

S^3 中的管状邻域 N_i 满足上面陈述的条件(c). 对 N_i 取一个首选的标架化，记∂N_i 上对应的首选纬线为 λ_i，并取 λ_i 的定向与 L_i 的一致. 再取一条经线 μ_i 并取 μ_i 的定向，满足由 λ_i 与 μ_i 的定向确定的∂N_i 以及 N_i 的定向，使首选标架化是保向同胚，此处标准实心环取标准定向. 于是条件(d)中的简单闭曲线 J_i 定向后,同调于 λ_i 和 μ_i 的一个整系数的线性组合,即 $J_i \sim a_i\lambda_i + b_i\mu_i$. 比值 $r_i = b_i/a_i$ 称为手术系数(surgery coefficient). 一般来说,r_i 是一个有理数,但当 $a_i = 0$ 时,则 $b_i \neq 0$,此时记成 $r_i = \infty$.

例如，若 L 是平凡纽结，手术系数 $r = b/a$，则术后流形 $M = L(a, b)$，为透镜空间. 特别当 $r = 0$ 时，$M \cong S^2 \times S^1$；当 $r = \pm 1$，$\pm \frac{1}{2}$，$\pm \frac{1}{3}$，…，∞ 时，$M \cong S^3$. 若 L 是右三叶结，手术系数 $r = 1$，则术后流形是 Poincaré 流形.

实际上，Dehn 在［D 1］中，正是为构作同调 3 维球面而设计了在右三叶结上的 Dehn 手术，而对 Poincaré 流形提供了一个新的构作方法. 但 Dehn 的方法的重要性和优越性在于提供了构作大量同调 3 维球面的办法，以至于有人希望从中可以构作出 Poincaré 猜测的反例（参见 § 25.1）.

重要的是半个世纪以后,人们发现有关 Dehn 手术的基本定理.

基本定理　每个连通的可定向的闭的 3 维流形可以对 S^3 沿某个链环 L 施行一个 Dehn 手术而得.

这个定理是 Wallace 和 W. B. R. Lickorish 于 20 世纪 60 年代初证明的. Wallace 提出换球术（即手术）的论文［Wal］主要是提出这个定理. Lickorish 在文章［Lic 1］中采用曲面的扭同胚来处理，被认为是一个漂亮的初等证明. 另外，J. Hempel 的［Hem 1］改进了 Lickorich 的证明，并使定理结论中施行手术的链环的每个分支均为 S^3 中的平凡结. 读者还可以参考［Rol］.

B. 分支复叠

Riemann 建立的 Riemann 曲面是复球面 S^2 上的有分支点的

复叠空间. 19 世纪末，从函数论和位势论已有人开始注意 $\mathbf{R}^3$ 或 S^3 的有分支的复叠空间，此时分支集为曲线. Heegaard 在 [He] 中就研究过，并用以构作 3 维流形. 但这篇文章直到法文译本于 1916 年再发表之前未受注意，只有 Tietze 于 1908 年在 [Ti] 中提到. Tietze 在该文中除介绍了纽结群的 Wirtinger 表出外，还列举了 S^3 的分支复叠. Alexander 在很短的时间之内解决了 Tietze 提出的两个猜测. 其一是，证明了有不同胚而具有相同的同伦群的透镜空间 [Al 2]；其二是，在 [Al 3] 中提出一个囊括所有可定向的闭 3 维流形的定理.

定理 (Alexander) 任何可定向的闭 3 维流形是 S^3 的一个分支复叠空间，其下分支集是一个分支指数≤2 的链环.

分支复叠定义如下，设 M^n 和 N^n 是两个紧的 n 维流形，$A \subset M^n$ 和 $B \subset N^n$ 是两个余维为 2 的子流形，连续映射 f: $M^n \to N^n$ 称为一个以 A 为上分支集 (upstairs) 并以 B 为下分支集 (downstairs) 的分支复叠 (branched covering)，如果

(1) N 中开集的原像的连通分支组成 M 的拓扑的一个基；

(2) $f(A)=B$, $f(M \setminus A)=N \setminus B$, 且 $f|(M \setminus A): M \setminus A \to N \setminus B$ 是一个复叠投射.

$(M \setminus A, f|(M \setminus A))$是 $N \setminus B$ 的一个复叠空间，称为与 f: $M \to N$ 相配的无分支的复叠空间 (associated unbranched covering space). 由 M 的紧性可知它是有限层的. A 中每个点 a 有一个分支指数 (branching index) k，表示在 a 的邻近 f 为 k 到 1，在 A 的连通分支上 k 是常数.

上述这个 Alexander 定理在 20 世纪 70 年代得到改进. H. Hilden [Hild] 和 J. Montesinos [Mon 1, 2] 差不多同时证明，定理的复叠可取为 3 层，而同时下分支集可选得较简单.

定理 (Hilden-Montesinos) 任何可定向的闭 3 维流形是 S^3 的一个 3 层分支复叠空间，其下分支集可有不同选取，例如取为一个纽结或者其分支均为平凡结的一个链环.

关于其证明，读者可参考［Bur-Z］或者［Rol］.

§ 24.7　Alexander 多项式

1928 年 Alexander 发表了他在纽结理论方面的最重要文章［Al 9］，其中定义了纽结的 Alexander 矩阵和 Alexander 多项式. 后来，由 W. Burau 于 1933 年［Bu］及 Reidemeister 和 H. G. Schumann 于 1934 年［Rei-S］，推广到 2 分支的链环. 再于 20 世纪 50 年代，由 Fox［Fo 4］推广到多个分支的链环的情形. 下面先就纽结的情形，用 Fox 的讲法来介绍 Alexander 矩阵，理想和多项式.

设 K 是 $\mathbf{R}^3$ 中给定的纽结. 设 $\langle x_1, \cdots, x_n; r_1, \cdots, r_{n-1}\rangle$ 是 K 的纽结群 G 的一个 Wirtinger 表出. 设 F_n 是由 x_1, $\cdots$, x_n 生成的自由群，G' 是 G 的交换子子群，φ: $F_n \to G$ 与 ψ: $G \to H = G/G'$ 是典则同态. 则 φ 和 ψ 可延拓为整系数群环上的同态 φ: $\mathbf{Z}[F_n] \to \mathbf{Z}[G]$ 和 $\psi: \mathbf{Z}[G] \to \mathbf{Z}[H]$. 对于 F_n 中的任意字 r，我们有自由导数 (free derivative) $\dfrac{\partial r}{\partial x_i}$，$i = 1$, $\cdots$, n，满足：

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij}, \quad \frac{\partial x_i^{-1}}{\partial x_i} = -x_i^{-1},$$

$$\frac{\partial (rs)}{\partial x_i} = \frac{\partial r}{\partial x_i} + r \cdot \left(\frac{\partial s}{\partial x_i}\right).$$

进而，我们定义纽结 K 的 Alexander 矩阵 (Alexander matrix) 为

$$(a_{ij}), \quad i = 1, \cdots, n-1; \quad j = 1, \cdots, n,$$

其中 $a_{ij} = \psi \circ \varphi \left(\dfrac{\partial r_i}{\partial x_j}\right)$. $\mathbf{Z}[H]$ 中由此矩阵的诸 $n-1$ 阶子式生成的理想 Λ，称为纽结 K 的 Alexander 理想 (Alexander ideal).

因为 H 是无限循环群，群环 $\mathbf{Z}[H]$ 中元素是形如 mt^n 之有限和，m，$n\in\mathbf{Z}$. Alexander 理想是一个主理想，其生成元$\Delta(t)$称为纽结 K 的 Alexander 多项式（Alexander polynomial）. 其初等因子，包括$\Delta(t)$在内，均为 K 的纽结型不变量. $\Delta(t)$按相差一个因子 $\pm t^\lambda$ 而言，是唯一确定的，并且有以下性质：

(i) $\Delta(1)=1$;

(ii) $\Delta(1/t)=t^\lambda\Delta(t)$.

反过来，任何整系数的满足条件(i)和(ii)的多项式必是某个纽结之 Alexander 多项式，这是 Seifert 1934 年[Se 3]证明的结果.

例如，平凡结之 Alexander 多项式为 $\Delta(t)=1$；三叶结之 Alexander 多项式为$\Delta(t)=1-t+t^2$；8 字结之 Alexander 多项式为$\Delta(t)=1-3t+t^2$. 它们都由此得以区别.

设 L 是 S^3 中的一个分支数 $\mu>1$ 的链环，$G=\pi_1(S^3\setminus L)$. 给定 Wirtinger 表出后，利用 Fox 的自由导数可类似地定义链环 L 的 Alexander 多项式$\Delta(t_1,\cdots,t_\mu)$，它是链环 L 的链环型的一个不变量，确定到只相差 $\mathbf{Z}[F^\mu]$中一个可逆元，其中 F^μ 为无限循环群 F 的 μ 重笛卡尔积. 若将其中 t_1，…，t_μ 均取成 t，得$\Delta(t,\cdots,t)$称为约化的 Alexander 多项式（reduced Alexander polynomial）. 而且它又可表作

$$\Delta(t,\cdots,t)=(t-1)^{\mu-2}\nabla(t),$$

其中$\nabla(t)$称为链环 L 的 Hosokawa 多项式（Hosokawa polynomial）. F. Hosokawa 在［Hoso］中证明了$\nabla(t)$是偶次的且是对称的. 而且任意这种多项式$f(t)\in\mathbf{Z}[F]$，对任意 $\mu>1$ 而言都是一个链环的 Hosokawa 多项式.

Alexander 多项式是 20 世纪前半时期最有用的纽结不变量，是第一个可计算的不变量. 虽然它不能区分三叶结的左右，也不能区分方结与懒散结，但对 19 世纪末的纽结表中交叉数不超过 8 的素纽结计算出它们的 Alexander 多项式，发现各不相同，这就严格证明了原来的分类. 因此 Alexander 多项式的建立，是纽

结理论发展早期最重大的贡献．但当初 Alexander 的组合导出方法也使人感到神秘．这里我们介绍的做法，是基于 Fox 的自由群的群环中的自由导数的理论，其存在性可用归纳法来证明．这是 Fox 的功劳 [Cr-F]．Fox 从 20 世纪 50 年代初便是当时纽结理论的代表人物．他将 Alexander 等前人的工作整理和推广，并于 60 年代初出版了广为流传的纽结理论的文章 [Fo 5] 和教科书 [Cr-F]．Fox 还是美国最优秀的围棋国手，1963 年曾作为两名选手之一，代表美国参加在东京举行的国际围棋比赛．

§ 24.8 Conway 的改进和拆接理论

1970 年，英国人 J. H. Conway [Con] 对 Alexander 多项式作了改进，从而揭露了代数不变量 $\Delta(t)$ 与纽结的正则投影图的几何之间的联系．

先引进记号：若 $f(t),g(t)\in\mathbf{Z}(t)$ 使得 $f(t)=\pm t^{\lambda}g(t),\lambda\in\mathbf{Z}$，则记作 $f(t)\doteq g(t)$．于是用归纳法可证 Alexander 多项式 $\Delta(t)$ 可写成

$$\Delta(t)\doteq a_r+a_{r+1}(t+t^{-1})+\cdots+a_{2r}(t^r+t^{-r}).$$

对 $\Delta(t)$ 作变量替换，令 $u=t+t^{-1}-2$，则 Alexander 多项式可写成

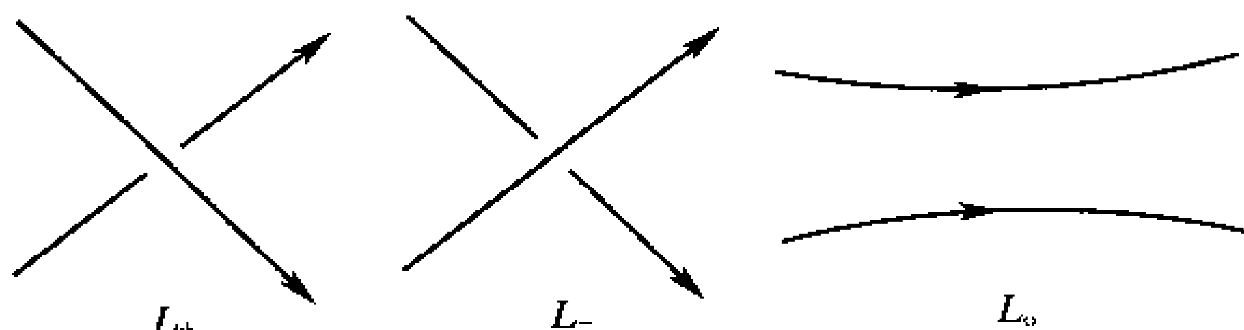
$$\Delta(t)=\sum_{i=0}^{r}c_iu^i.$$

Conway 对有向链环 L 定义了一个整系数多项式 $\nabla_L(z)$，它可从 L 的一个正则投影图归纳地用以下方式计算，我们取其为公理系统：

(1) 若 L 和 L' 是两个有向链环且 $L\sim L'$，则 $\nabla_L(z)=\nabla_{L'}(z)$．

(2) 若 L 是平凡结，则$\nabla_L(z)=0$.

(3) 若 L_+，L_- 和 L_0 代表在有向正则投影图中只差下面描述的一处局部



则有$\nabla_{L_+}-\nabla_{L_-}=z\nabla_{L_0}$这一条称为**拆接关系式**.

这三条中(2)是初始条件，而(3)提供了一个算法，现在称为 Conway 算法 (Conway algorithm). 这样的多项式若存在，则必唯一. 存在性由下面的定理保证.

定理 对 L 存在唯一的整系数多项式$\nabla_L(z)$满足 (1)，(2) 和 (3)，并且有性质：

$$\nabla_L(t-t^{-1})\doteq\Delta(t^2)\text{，当 } L \text{ 是纽结时，}$$

$$\nabla_L(t-t^{-1})\doteq(t^2-1)^{\mu-1}\nabla(t^2)\text{，当分支数 } \mu>1 \text{ 时.}$$

其中$\Delta(t)$为 L 的 Alexander 多项式，而$\nabla(t)$为 L 的 Hosokawa 多项式.

这个多项式$\nabla_L(z)$称为链环 L 的 Conway 多项式 (Conway polynomial).

下面来发挥(3)中的拆接关系. 记其中的三个链环为 $A=L_+$，$B=L_-$和 $C=L_0$. 将三者之间的关系写成代数运算关系 $A=B\oplus C$ 或 $B=A\ominus C$. 运算$\oplus$和$\ominus$并不结合，而是提供一个方便的记号.

由公理(3)有$\nabla_A-\nabla_B=z\nabla_C$. 因此$\nabla_{B\oplus C}=\nabla_B+z\nabla_C$及$\nabla_{A\ominus C}=\nabla_A-z\nabla_C$. 于是我们可以在 $\mathbf{Z}[z]$中定义$\oplus$和$\ominus$为 $f\oplus g=f+zg$ 和 $f\ominus g=f-zg$. 从而$\nabla_{B\oplus C}=\nabla_B\oplus\nabla_C$.

这些记号和有关想法都属于 Conway. 进而 Conway 创作了

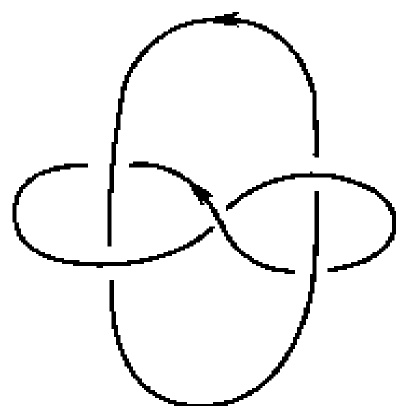
一套他命名的**拆接理论**（skein theory）如下．对 A，B 和 C 满足拆接关系如上述，定义 $A = B \oplus C$．而若 $B' \sim B \sim B''$，$C' \sim C \sim C''$，这里 $\sim$ 表等价，则可能 $B' \oplus C'$ 与 $B'' \oplus C''$ 并不等价．于是我们说 $B' \oplus C'$ 拆接等价（skein equivalent）于 $B'' \oplus C''$，并写成 $B' \oplus C' \underset{sk}{\sim} B'' \oplus C''$，如果运算可定义且 $B' \sim B''$，$C' \sim C''$．

更一般地，两个代数运算式说是拆接等价的，如果每个单项是拓扑地等价的．显然，若链环 $L \underset{sk}{\sim} L'$，则 $\nabla_L = \nabla_{L'}$．于是，若 $\mathscr{L}$ 表所有链环等价类之集合，则 ∇ 是从拆接类 $\mathscr{L}/sk$ 到带有运算 $\oplus$ 和 $\ominus$ 的 $\mathbf{Z}[z]$ 的一个同态

$$\nabla: \mathscr{L}/sk \to \mathbf{Z}[z].$$

我们用 Conway 多项式来检验给定的链环和它的镜面像．记链环 L 的镜面像为 $L^!$，则有

$$\nabla_{L^!}(z) = \nabla_L(-z).$$



5_1^2 = Whitehead 链环

例如，链环 $L = 5_1^2$ 与其镜面像 $L^!$ 是不等价的，因为 $\nabla_L(z) = z^3$．5_1^2 又称为 Whitehead 链环．

§ 24.9 Jones 多项式

20 世纪 80 年代纽结理论出现一项重大突破．新西兰数学家 V. Jones 从研究算子代数中戏剧性地发现了纽结不变量 Jones 多项式．据说他于 1984 年春天，在一次做关于算子代数的讲演时，听众中有一位重要的美国女拓扑学家 J. Birman，她告诉他，讲演中的一组公式与纽结不变量中遇到的很像．经过数次交谈后 Jones 弄懂了两者之间的关系，从而导出了新的多项式的纽结不变量．Jones 在［Jon 1］中引进了一个变量的 Jones 多项式．

Jones 对每一个链环的有向投影图 L，对应了一个以 t 为不定元的整系数多项式$V_L(t)$，满足以下三条公理：

(1) 若有向投影图 L 与 L' 互相同痕，则 $V_L = V_{L'}$；

(2) 平凡纽结$\bigcirc$对应的多项式 $V_{\bigcirc}=1$；

(3) 拆接关系式

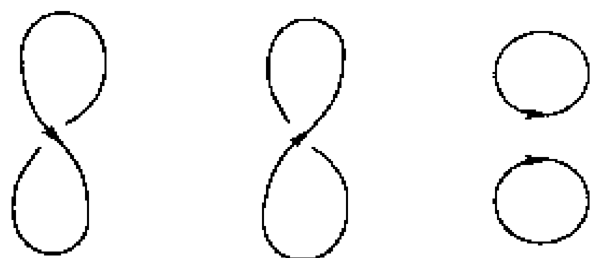
$$t^{-1}V_{L_+}(t)-tV_{L_-}(t)=(t^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}})V_{L_0}(t).$$

Jones 运用算子代数的方法证明基本定理如下.

定理 对每个链环的有向投影图 L，存在唯一的整系数**多项式** $V_L(t)$满足(1)、(2)和(3).

这个多项式称为 L 的 Jones **多项式** (Jones polynomial).

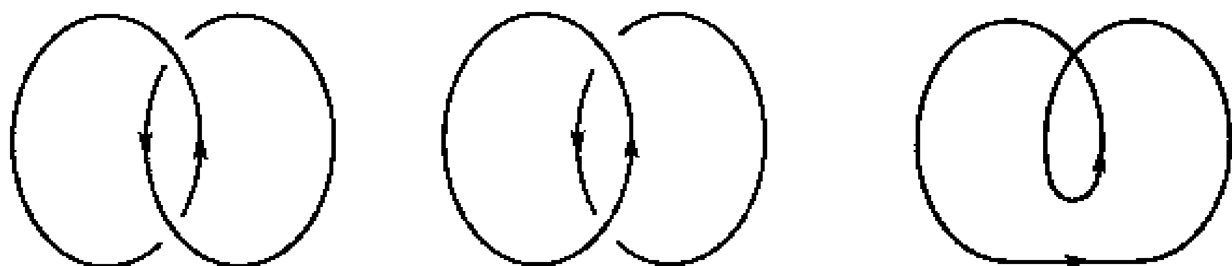
例 1 设给了三个有向投影图如下：



左中两个为平凡结，右面那个是平凡链环. 它们是一个拆接关系，因此由(2)和(3)可知

$$V_{\bigcirc\bigcirc}(t)=-(t^{-\frac{1}{2}}+t^{\frac{1}{2}}).$$

例 2 应用(3)于拆接关系



得 $V_{\bigcirc\!\!\bigcirc}(t)=-t^{\frac{1}{2}}-t^{\frac{5}{2}}$. 同样可得 $V_{\bigcirc\!\!\bigcirc}(t)=-t^{-\frac{5}{2}}-t^{-\frac{1}{2}}$. 说明$\bigcirc\!\!\bigcirc$与$\bigcirc\!\!\bigcirc$不同痕.

例 3　三叶结　左三叶结的 Jones 多项式为 $V(t) = -t^{-4} + t^{-3} + t^{-1}$；而右三叶结的 Jones 多项式为 $V(t) = t + t^3 - t^4$. 所以左右三叶结不同痕.

接着，L. Kauffman 提出了简化的办法 [Kau 2, 3]，用状态和模型法构作出 Jones 多项式. 其实 Kauffman 在研究 Conway 的[Con]的基础上于 1982 年便写成了 [Kau 1]，他发现了链环图的尖括号多项式. 有人说"该多项式简单得'连猫都明白'，…但链环的 Jones 多项式利用尖括号多项式就可以简单表示" [Kaw]. Kauffman 因此名声雀起，并且掀起了推广 Jones 多项式的热潮，例如出现了 HOMFLY 多项式 [HOMFLY].

Jones 多项式这个新的不变量的功效由于解决了 Tait 猜测而使人信服，并得到极高评价. Tait 在编纽结表 [Ta] [Hos-Th-W] 时提出了若干个猜测，约一个世纪无法证明. 而在 Jones 的论文 [Jon 1, 2] 发表后，迅速得到解决. 下面我们只介绍其中之一.

Tait 猜测　一个交错的投影图往往是该纽结的交叉点最少的投影图.

这个猜测是 1986 年被 Kauffman [Kau 2] 和 K. Murasugi (村杉) [Mur 1, 2] 证明的.

建议读者参考姜伯驹写的《绳圈的数学》[姜]. 这既是一本通俗的数学科学读物，又是对准备专攻纽结理论的读者的一本入门的教科书. 深入浅出，通俗易懂，是一本难得的好书.

§ 24.10　Kontsevich 的新工作

俄国人 M. L. Kontsevich 是 20 世纪 90 年代出现的一位亟为突出的人物. 他继承了俄国和苏联重视基础数学并与理论物理

相结合的传统．90 年代初，先是另一位俄国人 V．A．Vassiliev [Vas] 对纽结空间引进了很广的不变量，现在称之为 Vassiliev 不变量（Vassiliev's invariant），关于此 Birman 与林晓松在 [Bir-L] 中有进一步的探讨．接着 Kontsevich [Kon 1，2，3] 则对于纽结的 Gauss 环绕数作了极大的推广，并利用这个推广和一个新的概念"图复形的上同调（cohomology of graph complex）"产生了 Vassiliev 不变量．Kontsevich 给出了 Calabi-Yau 流形上有理曲线"个数"的定义，并给出明显计算公式．这对镜面对称领域后来的工作极为重要．他还能从物理直观上给出关于纽结的一些重要猜测，其中有些已被证明．他的成就已在国际数学界得到极高的评价．这方面许多工作还才开始，尚待进一步深入．

第二十五章　三维流形

自 Poincaré 建立组合拓扑学开始，他以及早期的后继者都以三维流形作为主要的研究对象．这是自然的，因为二维的曲面分类已基本完成，三维的对象是可以借助直观作部分想象的，并且可依靠对曲面理论的利用以及对纽结理论的利用而获得利益．

组合方法得到充分发挥，基本群对于三维流形的重要性被认识．围绕着 Poincaré 猜测的努力却始终未获成功．但对于透镜空间，Seifert 流形和 Haken 流形等的研究成果有重要意义，为拓扑学提供了大量重要例子的库存．

重要的突破是于 20 世纪 70 年代由 W. Thurston 做出的．他将双曲几何结构引入三维流形分类而获得巨大进展．

下面就来介绍这一发展简史．注意到在三维情形，*TOP* 范畴，*PL* 范畴和 *DIFF* 范畴完全一致．因此，我们为了方便有时采用组合结构，有时采用光滑结构．又由于从可定向流形推广到不可定向流形并无根本性的困难，为简单起见，本章中谈到的三维流形都假定是可定向的．

§ 25.1　Poincaré 猜测

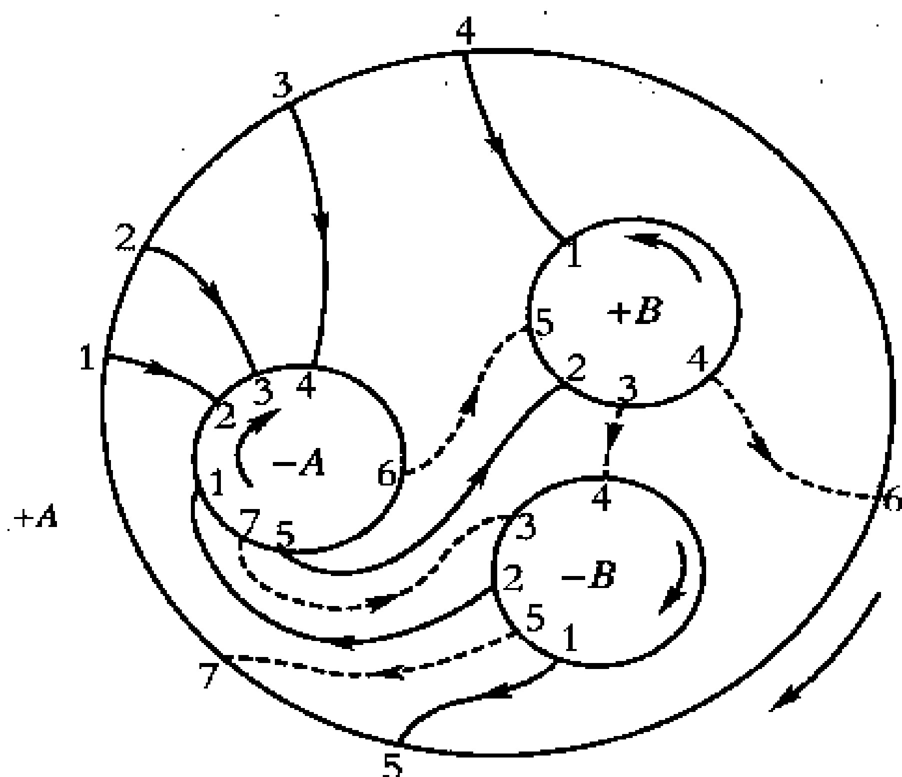
Poincaré 于 1900 年在他的第二篇补充［P 4］的最后，提出

以下断言：同调平凡的流形同胚于一个球面．四年以后，他在第五个补充［P 7］中举出一个反例，一个闭三维流形具有与 S^3 一样的同调，但其基本群不是平凡的．这个流形现今已被称为 Poincaré 流形，它的构作用到了 Heegaard 于 1898 年的博士论文［He］中提出的办法，现通称为 Heegaard 分解．

设 M 是一个连通的三维流形．设 T 是 M 的一个单纯的三角剖分，使成为一个组合流形．T 的一维骨架在 M 中的一个正则邻域的闭包记作 H_1，H_1 在 M 中的余集的闭包记作 H_2，它可看作 T 的对偶三角剖分的一维骨架在 M 中的一个正则邻域的闭包．容易看出 H_1 和 H_2 都是在一个闭的三维胞腔上附贴上相同数目的一维环柄，即都是亏格为 g 的一维环柄体，它们享有公共的边缘，它是一个亏格为 g 的闭曲面．于是，(H_1, H_2)称为 M 的一个 Heegaard 分解（splitting）．

反之，设 H_1 和 H_2 是给定的两个亏格都是 g 的一维环柄体，并设 h：$\partial H_2 \to \partial H_1$ 是一个同胚，则用 h 粘合后所得空间 $M = M_1 \cup_h H_2$ 是一个三维流形，并且(H_1, H_2)是 M 的一个 Heegaard 分解．

Poincaré 当初的做法如下：取一个亏格 2 的有向环柄体 H_1，设 $D_1^{(1)}$ 和 $D_2^{(1)}$ 是 H_1 中两个环柄的核心圆盘．将 H_1 沿 $D_1^{(1)}$ 和 $D_2^{(1)}$ 切开得一个三维球体，同时将 H_1 的表面∂H_1，一个亏格 2 的有向曲面，切开成为一个有 4 个洞的球面，它可铺平为有 3 个洞的圆盘（如下页图）．记圆盘的周界及 3 个洞的周界定向后分别为 $\pm A = \pm C_1^{(1)}$ 和 $\pm B = \pm C_2^{(1)}$，它们分别由 $D_1^{(1)}$ 和 $D_2^{(1)}$ 切开．另取一个亏格 2 的有向环柄体 H_2，设 $D_1^{(2)}$ 和 $D_2^{(2)}$ 是 H_2 中两个环柄的核心圆盘并且 $C_1^{(2)} = \partial D_1^{(2)}$ 和 $C_2^{(2)} = \partial D_2^{(2)}$ 是∂H_2 上的两个有向圆周．设 h：$\partial H_2 \to \partial H_1$ 是附贴同胚，则 $C_1' = h(C_1^{(2)})$和 $C_2' = h(C_2^{(2)})$称为特征曲线（characteristic curves）．记 $M = H_1 \cup_h H_2$，它被∂H_1 上的特征曲线 C_1' 和 C_2' 所决定至同胚．



而且 M 的基本群可用如下方式表出：对 H_1 的每个环柄取一个生成元，然后在$\pi_1(H_1)$中取特征曲线 C_1' 和 C_2' 代表的同伦类 $[C_1']$ 和 $[C_2']$ 为关系子，则关系为$[C_1']=1$ 和$[C_2']=1$. 特别，若取特征曲线如图所示，所得三维流形即 Poincaré 所构作，今记作 P. 于是有

$$\pi_1(P)=\langle a,b;a^4b^{-1}a^{-1}b^{-1}=1,b^{-1}a^{-1}b^2a^{-1}=1\rangle.$$

但$\pi_1(P)=[\pi_1(P),\pi_1(P)]$，故 $H_1(P)=0$. 再由 Poincaré 对偶定理，$H_2(P)=0$，即 P 是一个同调三维球面，但$\pi_1(P)\neq\{1\}$.

Poincaré 接着在［P 7］中针对三维提出下面猜测.

Poincaré 猜测　每个单连通的闭三维流形同胚于 S^3. 这里单连通意指连通并且基本群平凡.

同伦等价于 S^n 的闭 n 维流形称为同伦 n 维球面. 不难证明，闭的三维流形是同伦三维球面的充要条件是，它是单连通的. 于是 Poincaré 猜测可改写为：

每个同伦三维球面均同胚于 S^3.

将它推广到一般维数便有

广义 Poincaré 猜测 每个同伦 n 维球面同胚于 S^n.

这是 TOP 范畴的提法，也可对 PL 范畴和 $DIFF$ 范畴来提. 关于 $n\geqslant 5$ 的广义 Poincaré 猜测，请参考 §20.2；关于 4 维的广义 Poincaré 猜测，请参考 §26.4.

Poincaré 猜测至今仍悬而未决. 它在近百年的期间始终是数学家最感兴趣的问题之一.

直接为 Poincaré 猜测提供的一个“证明”是 1934 年 J. H. C. Whitehead 的论文 [WhH 1]，但这是错的. 该作者自己接着发表了一个更正 [WhH 2]. 1958 年一份日本杂志上的一篇长达一百零六页的文章也未被认可. 1985 年报载英国瓦里克的数学家提供了一个解答，接着厚达八十页的预印本散发全世界，亦未被认可. 至今，关于 Poincaré 猜测已获解决的传说时有所闻，从未间断. 我们盼望从中会有一个得到数学界的认可. Poincaré 猜测成立与否有重要的推论. 例如，有下面的 [Bi 3]

定理 若 Poincaré 猜测成立，则任何三角剖分的 4 维流形必为组合流形.

由此，从目前的知识可知，若 Poincaré 猜测成立，则存在闭的 4 维流形不可三角剖分，例如 $|E_8|$，因为它是不可光滑化的从而它不是组合流形（参见 §26.4).

§25.2 透镜空间

运用 Heegaard 分解来研究三维流形时，我们希望得到的分解的亏格越低越好. 只有 S^3 才具有亏格为 0 的 Heegaard 分解. 但要想降低 Heegaard 分解的亏格却并非易事. 有相当长的一段时期人们对亏格为 1 的 Heegaard 分解进行了详细研究.

我们讨论亏格为 1 的可定向情形. 取两个实心环（solid tori)

V_1 和 V_2. 若 $h: \partial V_2 \to \partial V_1$ 是一个同胚，我们便得一个三维流形 $M = V_1 \cup_h V_2$. M 是一个可定向的连通的闭三维流形，其同胚型只依赖于$h(m_2)$在∂V_1 中的同伦类，其中 m_2 是 V_2 的经线 (meridian). 在 V_1 的表面取定经线 m_1 和纬线 (latitude) l_1，其同伦类仍记作 m_1 和 l_1，组成$\pi_1(\partial V_1)$的生成元. 于是可将$h(m_2)$的同伦类写成

$$h_*(m_2) = pl_1 + qm_1,$$

其中 p 和 q 为互素的整数. M 称为型为(p, q)的透镜空间 (lens space)，并记作$L(p, q)$. 特别$S^3 = L(1, q)$和 $S^2 \times S^1 = L(0, 1)$也包括在内，有些作者将它们排除在外.

透镜空间研究的历史很长，因为它是三维流形中非平凡对象中最简单的一类，但内容却很丰富，为拓扑学提供了大量重要例证. 我们发现，最早研究透镜空间的是 Heegaard，他在 1889 年的博士论文 [He] 中就论及 (3, 1) 型透镜空间. 其次是 1908 年 Tietze [Ti]，他定义了透镜空间，并猜想 L (5, 1) 和 L (5, 2) 是不同胚的. 后来，Alexander 于 1919 年在 [Al 2] 中证明了这一点. 而透镜空间这个名称则迟到 1934 年才由 Seifert 和 Threlfall 在著名的教科书 [Se-T 1] 中提出. Reidemeister 于 1935 年 [Rei 2] 对透镜空间按半线性等价进行了分类，即模主猜测分类，加上 Moise 50 年代初对 3 维主猜测的证明，便得拓扑分类. E. J. Brody 则于 1960 年利用纽结重又进行了拓扑分类 [By].

可以证明

$$\begin{aligned} L(p, q) &= L(p, -q) = L(-p, q) \\ &= L(-p, -q) = L(p, q+kp). \end{aligned}$$

于是我们约定 $0 < q < p$. 这也就排除了 S^3 和 $S^2 \times S^1$. 我们有以下基本结论：

(1) $L(p, q)$的基本群是有限循环群 $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$.

(2) (Alexander[Al 2]) $L(5, 1)$和 $L(5, 2)$是不同胚的.

(3) (J.H.C.Whitehead[WhH 4]) $L(p,q)$和 $L(p',q')$有相同的伦型，当且仅当 $p=p'$且 qq'或 $-qq'(\mathrm{mod}\ p)$是一个平方数.

(4) (Seifert-Reidemeister[Se-T 2][Rei 2]) $L(p,q)$与 $L(p',q')$同胚，当且仅当 $p=p'$且 $q'\equiv\pm q(\mathrm{mod}\ p)$或 $qq'\equiv\pm 1(\mathrm{mod}\ p)$.

(5) (见[Hem 2;36]) $L(p,q)$上允许反向自同胚的充要条件是 $q^2\equiv -1(\mathrm{mod}\ p)$.

由 (3) 可知，$L(5,1)$和 $L(5,2)$不具有相同的伦型；而 $L(7,1)$和 $L(7,2)$则具有相同伦型，但由 (4) 知，它们不同胚；由 (5) 可知，$L(5,1)$不允许有反向自同胚，而 $L(5,2)$上则允许有反向自同胚.

§25.3 Dehn 引理，环路定理和球面定理

在 1910 年的论文 [D 1] 中，Dehn 陈述了后来变得很受人关注的并被冠以 Dehn's Lemma 的引理：

(1) **Dehn 引理** 若三维流形 M 中一条嵌入∂M 的圆周C 在 M 中可缩，则 C 是M 中一个正常嵌入的圆盘的边缘.

Dehn 在该文中给了一个很长的几何“证明”，但不幸它有严重的缺陷而不被认可. 经过几乎半个世纪之久的努力，希腊拓扑学家 C. Papakyriakopoulos 于 1957 年找到了正确的证明，而确认了这个引理是正确的 [Pa 2]. 他并且还证明了另外两个定理 [Pa 3]，介绍如下.

(2) **环路定理** 若 M 是一个三维流形并且包含同态$\pi_1(\partial M)\to\pi_1(M)$有非零核. 则存在一个正常嵌入的二维圆盘 $D\subset M$，使得∂D 位于∂M 中，并在$\pi_1(\partial M)$中表示一个非平凡元素.

(3) **球面定理** 若 M 是一个三维流形使得$\pi_2(M)\neq 0$，则

在 M 中存在一个嵌入的二维球面 S，它在 M 中不可缩成一点.

Dehn 引理的证明：圆周 C 是圆盘 D^2 的边缘 ∂D^2 在 ∂M 中的嵌入象，因 C 在 M 中可缩，此嵌入能扩张成圆盘上的连续映射 f：$D^2 \to M$. 最初人们想用"剪刀加浆糊"的办法来消去映射 f：$D^2 \to M$ 的自交点，但都未能成功. I. Johansson 曾在 1935 年［Joh］给出例子说明只用这种办法是不够的.

Papakyriakopoulos 的方法是构作 M 的复叠空间的塔 p：$\widetilde{M} \to M$，使分解了原来的 $f = p \circ \tilde{f}$：

$$\begin{array}{ccc} D^2 & \xrightarrow{f} & M \\ & \tilde{f} \searrow \quad \nearrow p & \\ & \widetilde{M} & \end{array}$$

若 $\widetilde{M}$ 中相应的问题有一个解答为 $\bar{g}$，则复合映射 $p \circ \bar{g}$ 实际可用剪刀加浆糊的办法来约化. 关于此读者可参考［Hem 2］.

将环路定理和球面定理所提供的工具与不可压缩曲面（见 §25.7）的分析结合，并用到阶层系列，可以很有效地了解流形的结构. 对于 Haken 流形，F. Waldhausen［Wald 2］给出了分类定理（见 §25.6）.

§25.4 Seifert 流形

Seifert 在 1932 年的一篇长文［Se 2］中介绍了具有例外纤维的纤维化方法. 其涵义意味深长.

设（μ，ν）是一对互素的整数，一个型为（μ，ν）的纤维化实心环，是圆柱体 $D^2 \times I$ 通过等置 $((r,\theta),1) = ((r,\theta + \frac{2\pi\nu}{\mu}),0)$ 而得的商空间，其中 (r,θ) 为 D^2 中的极坐标. 圆柱体中的 $\{x\} \times I$，当 $x \neq 0$ 时，在商空间中的像，每 $|\mu|$ 根连成商空间

中的一个圆周，称为纤维. $\{0\}\times I$ 的像是一个圆周，也是纤维，称为芯子，它与经圆盘 $D^2\times\{0\}$ 只交一次，而其他纤维则恰交 $|\mu|$ 次. 在保纤维的同胚之下我们可设 $\mu>0$ 和 $0\leqslant\nu<\mu/2$. μ 称为指数 (index). 当 $\mu>1$ 时，该纤维化实心环称为例外纤维化的，并且其芯子称为一个例外纤维 (exceptional fibre). 当 $\mu=1$ 时，此纤维化实心环称为正则纤维化的，并且每个纤维都是正则纤维.

一个三维流形 M 称为一个 Seifert 流形，如果 M 是一族互相不交的圆周的并集，这些圆周称作纤维，使得每个纤维有一个闭邻域，称作纤维化邻域，它保纤维地同胚于某个上一段所说的那种纤维化的实心环. M 的一个纤维称为一个例外纤维，如果它有一个纤维化邻域保纤维地同胚于一个例外纤维化的实心环，使它映成例外纤维（即芯子）；否则，称为一个正则纤维. 紧的 Seifert 流形只有有限个例外纤维.

将一个 Seifert 流形 M 的每个纤维等置为一点，所得的商空间 B 称为该 Seifert 流形的轨道流形 (orbit-manifold)，是一个二维流形（曲面）. 它是连通的，如果 M 是连通的.

20 世纪 60 年代以后，关于 Seifert 流形的研究，重要的有，D. B. A. Epstein [Ep]，W. Jaco 和 B. Shalen [Jac-S 1]，P. Orlik，E. Vogt 和 H. Zieschang [OVZ]，以及 F. Waldhausen [Wald] 等工作. [OVZ] 中的主要结论是，大多数 Seifert 流形的纤维化结构，在保纤维同胚下，被基本群和一些附加条所决定. 特别，除某些特殊情形外，两个 Seifert 流形是同胚的，当且仅当它们是保纤维同胚的. [Ep 3] 中的主要定理是，若一个紧三维流形可以表作以圆周为叶片的 C^1 叶状结构，则它 C^1 微分同胚于一个 Seifert 纤维化.

§ 25.5 连通和分解

一种将给定的流形分解为较简单的对象的办法是作连通和分解，这在曲面分类的研究中已广泛采用．设 M，M_1 和 M_2 是连通的闭三维流形．设 $B_i \subset M_i$ 是嵌入的三维胞腔，$R_i = M_i \setminus \mathrm{Int}\, B_i$，且 $h_i: R_i \to M$ 是嵌入，$i = 1, 2$，使得 $h_1(R_1) \cap h_2(R_2) = h_1(\partial B_1) = h_2(\partial B_2)$ 并且 $M = h_1(R_1) \cup h_2(R_2)$．我们说 M 是 M_1 和 M_2 的连通和，记作 $M = M_1 \# M_2$．

若 M，M_1，M_2 都是可定向的并且都有向时，我们设上述 h_i 均为保向的，则说有向流形 M 是有向流形 M_1 和 M_2 的连通和，记作 $M = M_1 \# M_2$，若 h_1 是保向的而 h_2 是反向的，则说有向流形 M 是有向流形 M_1 和 $-M_2$ 的连通和，记作 $M = M_1 \# (-M_2)$，这里 $-M_2$ 表示带有与 M_2 已给定向相反之定向．值得注意的是，存在有向的流形 M_1，M_2 使得 $M_1 \# M_2$ 与 $M_1 \# (-M_2)$ 不同胚，其实只需 M_2 上不存在反向的自同胚即可，而透镜空间 $L(5,1)$ 便是一例（参见 § 25.2）．

设连通的三维流形 M 可以表成 $M = M_1 \# M_2$，则其基本群有重要关系

$$\pi_1(M) = \pi_1(M_1) * \pi_1(M_2).$$

还可以证明以下关于基本群的定理：

(1)（D. Epstein [Ep 1, 2] 设 G 是某三维流形 M 的基本群 $\pi_1(M)$ 的子群且 G 是有限表出的阿贝尔群．则 G 同构于 1，$\mathbf{Z}$，$\mathbf{Z}+\mathbf{Z}$，$\mathbf{Z}+\mathbf{Z}+\mathbf{Z}$，$\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$，$\mathbf{Z}+\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ 之一．

(2)（B. Evans 和 L. Moser [Ev-M]）若 G 是某三维流形 M 的基本群 $\pi_1(M)$ 的子群且 G 是无限表出阿贝尔群．则 G 同构

于有理数加法群的一个子群.

(3)(G. Scott [Sco 1] 和 P. Shalen [sh]) 设 G 同构于某三维流形的基本群且 G 是有限生成的. 则 G 必为有限表出的.

一个三维流形 M 称为素的 (prime), 若 $M = M_1 \# M_2$ 蕴涵着 M_1 与 M_2 中有一个是三维球面 S^3. 例如, 透镜空间是素的; S^1 上的 S^2 丛有两个, 一为 $S^2 \times S^1$ 是可定向的, 另一记作 $S^2 \tilde{\times} S^1$ 是不可定向的, 但均为素的.

连通和分解的基本结论如下:

唯一素分解定理 每个闭的三维流形能被表作有限个素因子之连通和, 并且连通和分解不计因子的顺序是唯一的.

此定理的存在性属于 H. Kneser [Kn 2], 而唯一性则迟至 1962 年才见于 Milnor 的 [Mi 13]. 由此, 闭的 (从而紧的) 三维流形分类便约化为素流形的分类.

§25.6 Haken 流形

W. Haken 在 20 世纪 60 年代对三维流形做出过重要研究 [Hak 1, 2, 3], 他主要运用了不可压缩曲面. 在文献中有关可压缩曲面的定义不尽相同, 现按 Jaco [Jac] 的说法, 介绍如下. 三维流形 M 中正常曲面 F 称为是一个可压缩曲面 (compressible surface), 如果 F 满足以下条件之一: (i) F 是 M 中界一个三维胞腔的二维球面; 或 (ii) 若存在一个二维胞腔 $D \subset M$, 使得 $D \cap F = \partial D$ 并且 $[\partial D]$ 在 F 中不是平凡的. 否则, F 称为一个不可压缩曲面 (incompressible surface).

下面的有限性定理很重要 [Hak 3], 现只对闭曲面陈述如下:

Haken 有限性 设 M 是一个紧的三维流形. 存在一个非负整数 $n_0(M)$, 使得如果 $\{F_1, \cdots, F_n\}$ 是 M 中任意两两互不相交的不可压缩的闭曲面族. 若 $n > n_0(M)$, 则必存在某两个 $i \neq j$ 使得 F_i 与 F_j 在 M 中平行.

取 $h(M)$ 为定理结论中的非负整数 $n_0(M)$ 之最小者, 称为 M 的 **Haken 数** (Haken number).

一个三维流形 M 称为是**不可约化的** (irreducible), 如果 M 包含的光滑嵌入的二维球面均界 M 中一个三维胞腔. 不可约化的三维流形必是素的.

早期的文献, 如 [Hem 2], 称含有一个正常的双侧的不可压缩曲面的三维流形为充分大的 (sufficiently large) 流形. W. Haken [Hak] 对这类流形做过重要研究. Thurston 建议, 将充分大的流形称为 Haken 流形. 这一事实见于 C. T. C. Wall 关于 Thurston 工作的介绍 [Wa 9]. 我们采纳新近的重要文献 [Ki 3] 中的定义: 一个三维流形称为 **Haken 流形**, 如果它是不可约化的, 并且它含有一个正常的双侧的不可压缩曲面.

Waldhausen [Wald 2] 证明了 Haken 流形的分类定理, 其中最重要的特殊情况可陈述为:.

分类定理 两个闭的 Haken 流形如果有同构的基本群, 则它们是同胚的.

若将 Haken 流形与 Seifert 流形联系起来, 有许多人做过工作. 其中有 [Jac-S 1]

定理 设 M 是一个紧 Haken 流形. 则 $\pi_1(M)$ 有一个无限循环的正规子群, 当且仅当 M 同胚于一个 Seifert 流形.

Haken 流形的类相当庞大, 但是 Haken 的 Seifert 流形这个子类已完全了解. Johansson [Joh 2] 和 Jaco 及 Shalen [Jac-S] 建立了三维流形中特征子流形的理论, 其中最常用的特殊情形是下述的

环面分割定理 若 M 是 Haken 流形, ∂M 由不可压缩环面

组成，则存在同痕意义下唯一的一族两两不相交并且分支数最少的不可压缩环面，它们将 M 切成若干块，每块或者是 Seifert 流形，或者是无环面的（atoroidal），即其中的不可压缩环面必与边缘平行.

§ 25.7　Thurston 的突破

20 世纪 70 年代后期至 80 年代初期，三维流形的研究实现了一项重大突破，这是由 Thurston 贡献的.

三维流形的领域对拓扑学与几何学的交汇而言是丰沃的土壤. 两者的相互作用对于拓扑结构和几何结构的研究都有益处.

现在已经知道，有八种典型的齐性的三维几何学，它们的等距（isometry）群记作 G：

· E^3 上三维欧氏几何学，$G=\mathbf{R}^3\times SO(3)$；

· S^3 上三维球面几何学，$G=SO(4)$；

· H^3 上三维双曲几何学或罗巴切夫斯基几何学，$G=PSL(2,\mathbf{C})$；

· $S^3\times E^1$，$G=SO(3)\times$(欧氏直线等距群)；

· $H^2\times E^1$，$G=$(双曲平面几何等距群)$\times$(欧氏直线等距群)；

· 还有另外三种陈述起来比较复杂，读者有兴趣的可参看 [Sco 3] 或 [Thu 3].

一个三维流形 M 称为是几何的，如果它的万有复叠是以上八种之一，并且作为复叠变换的 $\pi_1(M)$ 是同构于上述对应的等距群的一个离散子群. 如果 ∂M 不空，则 M 称为是几何的，若 $\mathrm{Int}M$ 是几何的.

大约 1977 年，Thurston 提出一个大胆的猜测.

Thurston 猜测 每个紧的具有不可压缩边缘的三维流形 M 皆有一个典则方式分解为几何的块，也就是说，沿着一个典则族的互不相交的双侧的同胚于 S^2，或 T^2 的一些闭曲面将 M 切开便得到一些几何的块.

而且 Thurston 对 Haken 流形证明了这个猜测是对的 [Thu 3]. 我们把这个重大的事实写成一个定理.

Thurston 定理 Thurston 猜测对 Haken 流形成立.

这个定理的证明长期未见发表，直到 1996 年出版了 [Ot]，那里给出了一个完全的证明.

Thurston 的工作被认为是有关三维拓扑的革命性的进展. 其深刻影响在于改变了三维拓扑中传统的以“徒手 (bare hands)”技术为主的面貌，使得分析，几何与拓扑相结合，而进入现代数学的主流.

第二十六章　四维流形

自20世纪50年代中期以后，流形理论获得巨大发展．但四维流形没有包括在内，其原因是，由于维数不够高，使对高维流形而言的关键技术，Whitney绝招，在4维以下不成立；同时，又因为维数足够高，以至一、二维流形的直观处理方法不能直接借鉴，并且三维流形的知识也甚为缺乏．这造成了四维流形的特殊的困难和特有的挑战性，人们认为是神秘性．

直到20世纪70年代，有过许多预备性的重要研究，但实质性的突破是80年代以后的事．其特点有二，一是Casson纲领的实现，二是规范理论的应用．这两项惊人的突破结合起来，得到又一项惊人的结果：4维空间$\mathbf{R}^4$上存在怪异的微分结构，而且有不可数多个互相不微分同胚的微分结构．这在物理学上和哲学上应该引起进一步的思考．

神秘的面纱已经掀起了一角，所看到的部分内容并未解除神秘感，反而使神秘感大增．在很短的时期内，四维拓扑已成为拓扑学的主流方向之一，成为十几年来现代数学中最热闹的领域．这个领域正在迅速发展，前景尚不可预期，这里只简介这个理论的若干基本事实．

§ 26.1 前期重要成就和问题

三维流形的基本群是很受限制的，然而任何一个有限表出群均可实现为某个 4 维闭组合流形的基本群. 据此已初见 4 维拓扑的复杂程度. 于是研究者们往往限定基本群，特别先研究单连通的 4 维流形.

对于单连通的 4 维拓扑流形 M 而言，仅有的同调不变量便是 2 维整系数上同调群和上积组成的二次形式，或对偶地由 2 维整系数同调群和相交数组成的相交二次形式. 后者可应用 § 17.9 中 Thom 的结果 (6)，任何两个整系数同调类 x 和 $y\in H_2$ $(M;\mathbf{Z})$ 可分别用有向闭子曲面 F 和 G 表示，且 F 与 G 之相交数只与同调类 x 和 y 有关，称为 x 与 y 的相交数并记作 $x\cdot y$. 此处当应用 Thom 定理时似乎需假定流形是光滑的，但 F. Quinn [Qn] 已经证明，任何连通的 4 维拓扑流形去掉一点后便可光滑化，因此 Thom 定理对 4 维拓扑流形可以应用. 更一般地，对非单连通可定向的 4 维拓扑流形 M，亦可定义 $H_2(M;\mathbf{Z})$ /torsion $(H_2(M;\mathbf{Z}))$上的相交二次形式. 上述二次形式是整数环上的对称二次形式. 如果流形是闭的，则由 Poincaré 对偶定理可证，其相交二次形式是幺模的，即在任一基之下二次形式的矩阵的行列式等于 ± 1.

整数环上的幺模的对称二次形式有以下基本不变量：秩(rank)，号差（signature）和型（type）. 若二次形式之值恒为偶数，或等价地在任一基之下的矩阵的对角线上均为偶数，则称此二次形式为偶型（或称 II 型），否则称它为奇型（或称 I 型）. 奇型与偶型是本质不同的. 不定的幺模对称整二次形式已由其秩，号差和型完全分类：若 ω 是奇型的，则

$$\omega \cong n(1) \oplus m(-1), n, m \neq 0;$$

若 ω 是偶型的，则

$$\omega \cong nE_8 \oplus m\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, m > 0,$$

其中

$$E_8 = \begin{pmatrix} -2 & -1 & & & & & & \\ -1 & -2 & -1 & & 0 & & & \\ & -1 & -2 & -1 & & & & \\ & & -1 & -2 & -1 & & & \\ & & & -1 & -2 & -1 & & -1 \\ & 0 & & & -1 & -2 & -1 & \\ & & & & & -1 & -2 & \\ & & & & -1 & & & -2 \end{pmatrix},$$

矩阵中未明确写出的均为 0. E_8 是一个负定的幺模对称整数矩阵. 然而定的幺模对称整二次形式的分类是非常困难的，至今尚无分类定理，而只有所谓有限性定理（Eisenstein-Hermite）：对于任意自然数 r，秩为 r 的正定的幺模对称整二次形式的同构类只有有限类. 确切的同构类的数目还只对很小的 r 获得. 例如 $r \leqslant 16$, 可见于 M. Kneser 的文章 [KnM]；并且对于偶型当 $r = 32$ 时类数 $\geqslant 10^7$ 且当 $r = 40$ 时，类数 $\geqslant 10^{51}$. 关于此，读者可参考 [Mi-H].

J. H. C. Whitehead 在 1949 年 [WhH 6] 的一个结果于 1958 年被 Milnor [Mi 6] 加强为：设 M_1 和 M_2 是两个单连通的闭的 4 维光滑流形，ω_{M_1} 和 ω_{M_2} 分别表 M_1 和 M_2 的相交二次形式. 则 M_1 与 M_2 同伦等价的充要条件是，相交二次形式 ω_{M_1} 与 ω_{M_2} 同构.

20 世纪 60 年代，S. P. Novikov [Nov 3] 和 Wall [Wa 5] 改进了 J. H. C. Whitehead 的定理：设 M_1 和 M_2 是两个单连通的闭 4 维光滑流形. 则 M_1 和 M_2 是 h 协边的充要条件是，

ω_{M_1}与 ω_{M_2}同构.

Wall 同时 [Wa 5] 得到有关 4 维流形的 h 协边定理如下:设 M 和 N 是 h 协边的两个单连通的闭 4 维光滑流形, 则存在一个非负整数 k, 使得 $M \# k(S^2 \times S^2)$微分同胚于 $N \# k(S^2 \times S^2)$. 这是一个广为人知的结果. 但最近, 1995 年, C. L. Curtis 和项武忠等发现 [Cu-F-H-S] h 协边定理可以改进为: 设 (W; M, N) 是连接单连通的闭 4 维光滑流形 M 和 N 的一个光滑的 h 协边. 则存在分解 $M = M_0 \cup_\Sigma M_1$, $N = N_0 \cup_\Sigma N_1$, 其中 M_0 和 N_0 是以 Σ 为边缘的紧的可缩 4 维光滑流形, 使得 (M_1, Σ)与(N_1, Σ)微分同胚. 事实上, W 可以写作 $W = W_0 \cup_{\Sigma \times I} W_1$, 其中 ($W_0$; M_0, N_0) 通常是一个非平凡的 h 协边, 同时 W_1 微分同胚于 $M_1 \times I$. 作者在该文中说, 这个定理位居 1975 年左右的组合 4 维流形理论之主流之中, 但很奇怪居然被遗漏掉了, 迟到 1995 年才被发现.

Rohlin 在 1952 年发表过一个重要结果 [Ro 4]: 若 M 是可定向的闭 4 维光滑流形且其 2 维 Stiefel-Whitney 类 $w_2 = 0$. 则 M 的号差$\sigma(M) = \sigma(\omega_M)$满足

$$\sigma(M) \equiv 0 \bmod 16.$$

这是一个很了不起的结果. 读者可以拿它与二次形式的一个定理 (van der Blij) [Mi-H] 对比: 若幺模对称整二次形式 ω 是偶型的, 则

$$\sigma(\omega) \equiv 0 \bmod 8.$$

于是自然立即会提出一个具有挑战性的问题: 是否存在号差 $=8$ 的 4 维流形? 更一般的一个大问题是

问题 是否每一个幺模对称整二次形式均可实现为某个单连通的闭 4 维流形的相交二次形式? 如果可以实现, 其实现是否唯一或有几个?

我们先来看看 4 维拓扑的困难究竟何在.

§ 26.2 用球面表示二维同调类及 Whitney 绝招的失败

Rohlin 曾于 1951 年 [Ro 1] 中宣布，当 $n \geqslant 5$，$\pi_{n+3}(S^n)$ 为 12 阶循环群．他于 1952 年 [Ro 4] 中指出，那是错的，应为 24 阶循环群．并且说，其错误是由于，误认为光滑的 4 维流形的 2 维同调类均可由光滑嵌入的 2 维球面表示．同样的错误还在 [Ro 2] 中出现过．

这一重要发现的意义直到九年后才由 Kervaire 和 Milnor 所指出．他们在 [Ke-M 2] 中将 § 26.1 中陈述的 Rohlin 定理推广如下．设 M 是一个可定向的闭 4 维光滑流形，$b \in H_2(M; \mathbf{Z})$ 在 Poincaré 对偶之下的像经模 2 约化后等于 M 的 2 维 Stiefel-Whitney 类 w_2，这种 b 称为示性的．如果 b 能够用光滑嵌入的 2 维球面表示，则 $b \cdot b \equiv \sigma(M) \bmod 16$．

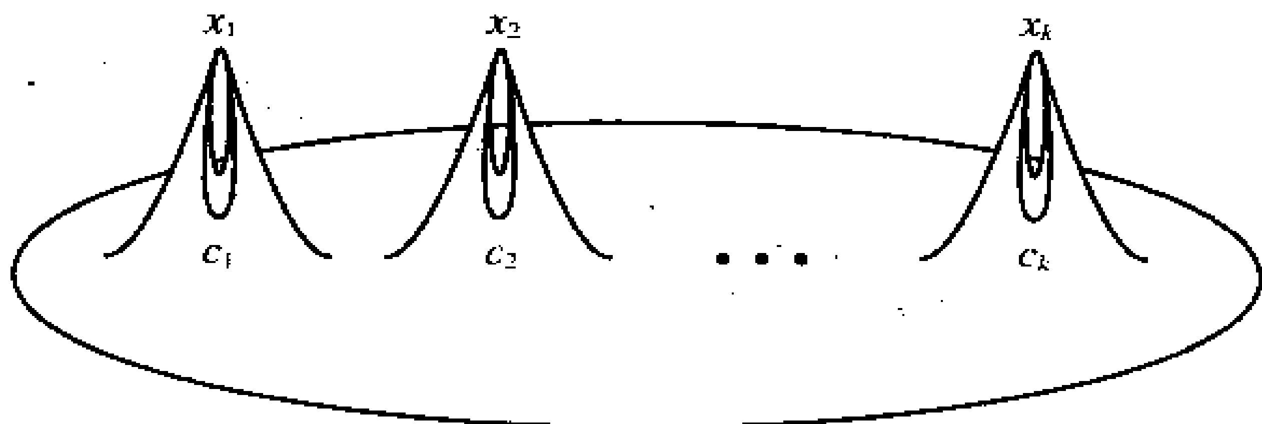
设 γ 是 $H_2(\mathbf{C}P^2; \mathbf{Z})$ 中由 $\mathbf{C}P^1 = S^2$ 表示的典则生成元．则根据上述推广的 Rohlin 定理可证，示性同调类 3γ 不能用光滑嵌入 $\mathbf{C}P^2$ 的 2 维球面表示．设 γ 和 $\bar{\gamma} \in H_2(\mathbf{C}P^2 \# \overline{\mathbf{C}P^2}; \mathbf{Z})$ 分别是 $\mathbf{C}P^2 \# \overline{\mathbf{C}P^2}$ 中加项 $\mathbf{C}P^2$ 和 $\overline{\mathbf{C}P^2}$ 中的由 $\mathbf{C}P^1 = S^2$ 表示的典则生成元，$\overline{\mathbf{C}P^2}$ 表示在作为实的 4 维流形 $\mathbf{C}P^2$ 上赋以与其复结构所决定的定向相反的定向而得到的有向流形．同理可证，示性同调类 $3\gamma + \bar{\gamma}$ 不能用光滑嵌入 $\mathbf{C}P^2 \# \overline{\mathbf{C}P^2}$ 的 2 维球面表示．但是可以证明，3γ 可用光滑嵌入 $\mathbf{C}P^2 \# \overline{\mathbf{C}P^2}$ 的 2 维球面表示，设 S_1 是这样的一个光滑嵌入的 2 维球面，并且设 S_2 是表示 $\bar{\gamma}$ 的一个光滑嵌入的 2 维球面．于是 S_1 与 S_2 的相交数为 $S_1 \cdot S_2 = (3\gamma) \cdot \bar{\gamma} = 0$．但是 S_1 与 S_2 即使经过同痕后也必有交点，因为否则，用一个管子连通它们，便得到一个光滑嵌入 $\mathbf{C}P^2 \# \overline{\mathbf{C}P^2}$ 的 2 维球面

表示 $3\gamma+\bar{\gamma}$，这与方才已证的结论相矛盾．这个结果宣布了 Whitney 绝招（见 §10.2 及 §20.2）在 4 维流形的情形的确是不成立的．这正是 4 维拓扑的困难所在．

§26.3 Casson 环柄

为克服 Whitney 绝招对 4 维失效所引起的困难．A. Casson 在 1973 年想出一个办法，设计出他自己称之为灵活的（flexible）环柄，现今已统称为 Casson 环柄如下［Cas］．

设 W^4 是一个有边 4 维光滑流形，∂W^4 是其边缘．设 D^2 是一个 2 维单位圆盘，∂D^2 是其边缘．设 f：$(D^2,\partial D^2)\to(W^4,\partial W^4)$是一个正规浸入（normal immersion），即 $f|\partial D^2:\partial D^2=S^1\to\partial W^4$ 是一个嵌入，f 与 W^4 在 $f(\partial D^2)$处横截相交，并且所有自相交点均为 $Int\ W^4$ 中的横截二重自相交点．则 $f(D^2)$是由一个圆盘将其中若干对点等置而得的二维复形，它是 W^4 中一个带奇点的浸入圆盘，记作 $D^{(1)}$．设 x_1，…，x_k 是这些奇点，每个都是两重横截自相交点．在 $D^{(1)}=f(D^2)$中存在不相交的简单闭曲



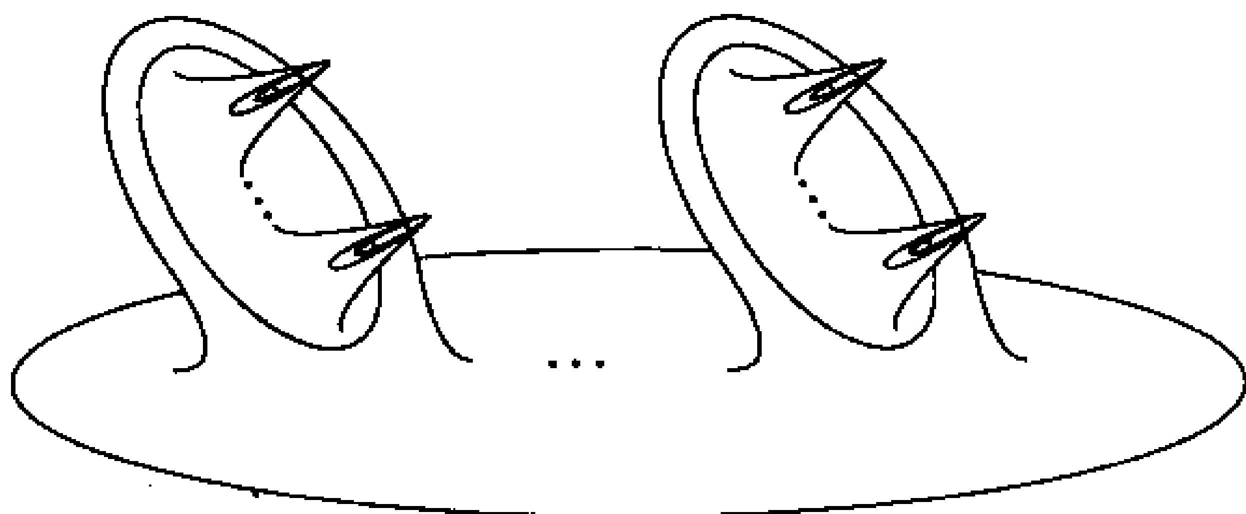
线 c_1，…，c_k 使得 $x_i\in c_i$ 对所有 i，且基本群$\pi_1(D^{(1)})$由这些闭曲线的同伦类自由地生成，称为 $D^{(1)}$ 的一组基．设在一组基中每

个成员 c_i 界一个 W^4 中正规浸入的奇异圆盘 $D_i^{(2)}$，满足：

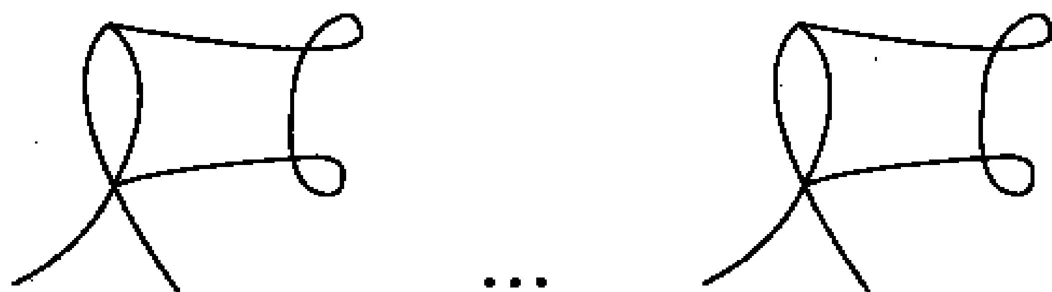
(1) 不交性，对所有 $i \neq j$ 有$D_i^{(2)} \cap D_j^{(2)} = \varnothing$；且

(2) 附贴性，$D_i^{(2)} \cap D^{(1)} = c_i$ 对所有 i.

我们将两层的奇异圆盘作并 $D^{(1)} \cup (\bigcup\limits_i D_i^{(2)})$，称为第二层塔(tower)，如下图所示.



今后用下面象征性的图表示：



设已构作好第 i 层奇异圆盘 $D_1^{(i)}$，…，$D_s^{(i)}$ 并设简单闭曲线 $c_1^{(i)}$，…，$c_t^{(i)}$ 组成所有 $D_1^{(i)}$，…，$D_s^{(i)}$ 的一组基，且每个 $c_j^{(i)}$ 界 W^4 中一个正规浸入的奇异圆盘 $D_j^{(i+1)}$，满足：

(1) 不交性，对所有 $h \neq j$ 有$D_h^{(i+1)} \cap D_j^{(i+1)} = \varnothing$；且

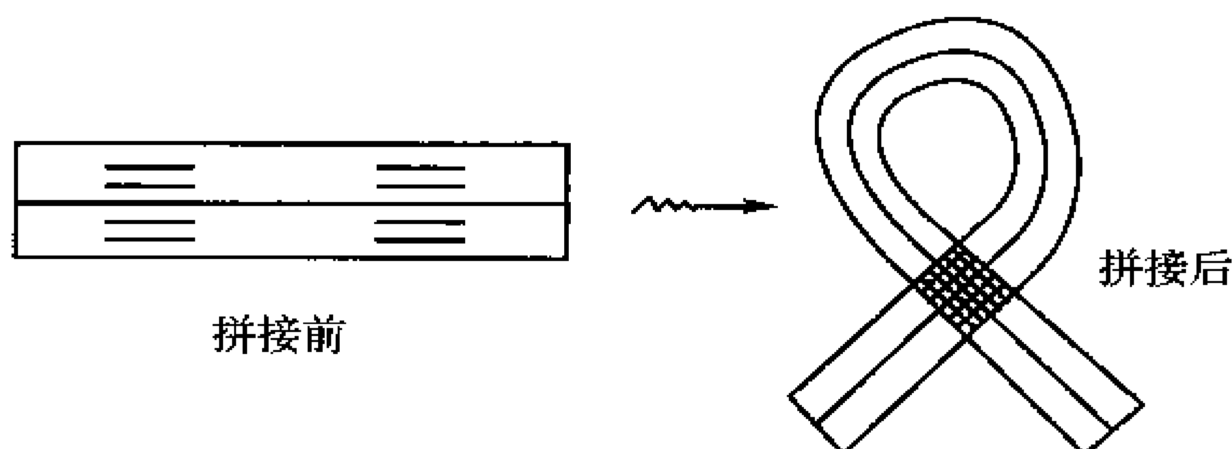
(2) 附贴性，$D_j^{(i+1)} \cap (\bigcup_{\substack{l \leqslant i \\ \mu}} D_\mu^{(l)}) = c_j^{(i)}$，对一切 j.

并集 $\bigcup_{\substack{l \leqslant i+1 \\ \mu}} D_\mu^{(l)}$ 称为第 $i+1$ 层塔.

这个过程可无限地进行下去. 我们取并集 $X = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} (\bigcup\limits_s D_s^{(i)})$，不难证明 X 是单连通的，即 $\pi_1(X) = 0$. 我们将以 X 作为

Casson环柄的骨架.

如果 f: $(D^2,\partial D^2)\to(W^4,\partial W^4)$是正规嵌入(无自相交的正规浸入), N 是$f(D^2)$在 W^4 中的正则邻域(管状邻域),则$(N,N\cap\partial W^4)\cong(D^2\times D^2,S^1\times D^2)$是一个 2 环柄. 如果 f 是一个有 k 个二重自相交的正规浸入,则$(N,N\cap\partial W^4)$是一个 2 环柄经 k 个自相拼接而得,其每个拼接(plumbing)示意如下.



这个 N 称为一个缠绕环柄 (kinky handle).

将 X 中每个奇异圆盘 $D_j^{(i)}$ 换作缠绕环柄$N(D_j^{(i)})$,使得第 $i+1$层缠绕环柄 $N(D_j^{(i+1)})$附贴在某个第 i 层缠绕环柄 $N(D_k^{(i)})$上. 此时要满足一个标架化(framing)要求; $N(D_j^{(i+1)})$的附贴需沿着 $N(D_k^{(i)})$上的一条特定曲线并且带有特定的标架化. 这条曲线及相应的标架化决定如下. 将标准 2 环柄 $D^2\times D^2$ 经一个自相拼接后微分同胚于 $S^1\times D^3$, 故若 g 只有一个二重自相交, 则 $N(g(D^2))$微分同胚于 $S^1\times D^3$,且生成 $\pi_1(g(D^2))$的类由简单曲线 c 代表,则可设 c 对应于 $S^1\times\{0\}$. 不难证明,存在一个办法将一个 2 环柄 H 附贴到$S^1\times D^3$ 上,使其附贴 a 球面(圆周)是 $S^1\times\{p\}$,其中 $p\in\partial D^3$,而满足$(S^1\times D^3\cup H,g(\partial D^2))$是(4 维球体,平凡纽结). 请注意,要求 $g(\partial D^2)$成为一个平凡纽结,决定了 2 环柄 H 的一个(在同痕之下)特别的附贴,我们称曲线 $S^1\times\{p\}$在 $\partial N(g(D^2))$中对应的曲线带上从 2 环柄 H 的芯子诱导而得的标架化, 为缠绕环柄的一条带有特定标架化的特定曲线.

设 CH 是无限并集 $\bigcup_{i=1}^{\infty}(\bigcup_s N(D_s^{(i)}))$. 于是 $(CH, N(f(\partial D^2)))$ 称为一个 **Casson 环柄**.

我们已经看出 CH 是单连通的. Casson 想必希望它是一个真正的开的 2 环柄，他 [Cas] 证明了 $(CH, N(f(\partial D^2)))$ 实际上正常(properly)同伦于开的 2 环柄 $(D^2\times\mathbf{R}^2, \partial D^2\times\mathbf{R}^2)$. 于是问题的实质在于，在何种条件下存在一个延拓了 $f|\partial D^2$ 的 Casson 环柄. 对此 Casson [Cas] 证明了如下的定理.

Casson 定理 设 W^4 是一个单连通的有边 4 维光滑流形，设 $f:(D^2,\partial D^2)\to(W^4,\partial W^4)$ 是一个正规浸入，并且在 W^4 中存在 $\alpha\in H_2(W^4;\mathbf{Z})$ 使得 $\alpha^2=0$ 和 $\alpha\cdot[f]=1$. 则存在一个 Casson 环柄 $V\subset W^4$, 使得 $V\cap\partial W^4$ 是 $f(\partial D^2)$ 在 ∂W^4 中的管状邻域，f rel ∂D^2 同伦于一个映入 V 中的映射，并且在 $f(\partial D^2)$ 上 V 的第一层的标架化与从 f 诱导的是一致的.

Casson 以上工作是 4 维拓扑发展的历史性转折，他提出了克服 4 维困难的正确的纲领，概念和技术，并获得了初步的重大进展. 当年 Casson 在各地做讲演，形成三个非常精练的短讲义在世界上流传，包括上面所介绍的内容在内. 直到 1986 年，这三篇讲义才连同 Rohlin 的几篇文章一道，加上若干评注及相关的论文，由 L. Guillou 和 A. Marin 编辑成《被遗忘的拓扑学的研究（A la recherche de la topologie perdue)》一书，正式出版 [Gui-M]. 读者从中可以参考，这就是 [Cas].

§ 26.4 Freedman 的突破

Casson 的纲领是由 M. H. Freedman 于 1982 年实现的.

Freedman 在普林斯顿大学受 W. Browder 指导于 1973 年获

得博士学位，当时他研究余维为 2 的换球术（见［Fre 1］）. Freedman 在［Fre 3］中说，他在研究生期间便梦想将高维流形拓扑学的某些关键技术转移到低维去，特别是 4 维. 上面讲到的，1973 年 Casson 已发展起 Casson 环柄理论，Freedman 是在 1974 年 Kirby 的一次私人聚会中从 Kirby 处学到的，但他花了几年功夫才完全理解 Casson 的观念和其潜力. 1978 年，Freedman 做了怪异 $S^3\times\mathbf{R}$ 的工作［Fre 2］. 而在 1978 年 5 月 Freedman 拜访了 B. Edwards，当他谈自己关于怪异 $S^3\times\mathbf{R}$ 工作时，Edwards 立刻指出可以将收缩（shrinking）这一 Bing 学派的技术加到 Freedman 的工作中，而形成几何控制（geometrical control）. 后来 Freedman 发现，几何控制可以精心处理乃至不可数地重复，而于 1981 年［Fre 3］证明了下面的结论.

Freedman 定理　任何 Casson 环柄 CH 或$(CH, N(f(\partial D^2)))$同胚于标准的开 2 环柄 $D^2\times\mathbf{R}^2$ 或$(D^2\times\mathbf{R}^2, \partial D^2\times\mathbf{R}^2)$.

这个定理的证明占了文章［Fre 3］的大部分篇幅，约有 60 页，足见其困难，此处不赘.

重要的是从这个定理出发，可以证明 **4 维流形的 h 协边定理**：设 M_1 和 M_2 是单连通的光滑的紧的 4 维流形，则任意单连通的光滑的 h 协边（W；M_1，M_2）必是一个拓扑乘积，即 W 同胚于 $M_1\times[0, 1]$. 进而可以证明，运用幺模对称整二次形式，能够对单连通的闭 4 维拓扑流形分类. 这里用到 Kirby-Siebenmann 不变量$\alpha(M)\in\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$,其中 M 是一个 4 维拓扑流形：$\alpha(M)=\bar{0}$,若 $M\times S^1$ 是可光滑化的；而 $\alpha(M)=\bar{1}$,若 $M\times S^1$ 是不可光滑化的.分类定理如下[Fre 3].

Freedman 定理　单连通的有向闭 4 维拓扑流形的有向同胚类的集合，一对一地对应于以下的偶对的集合：

$\{\langle[\omega],\alpha\rangle$:若 ω 是偶型,则要求满足条件 $\sigma(\omega)/8\equiv\alpha \pmod 2\}$

其中［ω］是幺模对称整二次形式 ω 的同构类，$\alpha\in\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$，而 $\sigma(\omega)$是 ω 的号差.

这个定理彻底回答了 §26.1 最后提出的大问题：每个偶型的幺模对称整二次形式均可实现为在同胚意义下唯一的一个单连通的有向闭 4 维拓扑流形的相交二次形式．每个奇型的幺模对称整二次形式均可实现为在同胚意义下两个单连通的有向闭 4 维拓扑流形的相交二次形式，其中至少有一个是不可光滑化的．

此定理结论中的一个特款，取 $\omega=\varnothing$，便是拓扑范畴的 4 维广义 Poincaré 猜测的肯定的回答．

4 维广义 Poincaré 猜测　若 Σ^4 是一个同伦等价于 S^4 的闭 4 维拓扑流形，则 Σ^4 同胚于 S^4．

类似地，存在唯一的单连通的闭的 4 维拓扑流形以 E_8 为相交二次形式的矩阵，记它为 $|E_8|$．由 Rohlin 定理知 $|E_8|$ 是不可光滑化的；$|E_8|\#|E_8|$ 的相交二次形式为 $E_8\oplus E_8$，它是不是可光滑化的，当时尚不可判断，读者请接下去看 §26.5．

§26.5　Donaldson 的突破

20 世纪 70 年代以来，理论物理学中的规范理论已受到数学界高度重视，Atiyah 就是一位积极的鼓吹者，他在世界许多学术中心做讲演并出版了讲义 [At 2]，产生了巨大的影响．1982 年，Atiyah 和 N. J. Hitchin 在牛津大学指导的一位研究生 S. K. Donaldson，从规范理论出发获得 4 维拓扑学新的重大突破，得到下面的定理 [Don 1]．

Donaldson 定理　设 M 是一个单连通的闭 4 维光滑流形，它的相交二次形式 ω_M 是正定的．则 ω_M 是标准的，即在整数环上等价于 $(1)\oplus\cdots\oplus(1)$．

这个定理把大量的具有正定的相交二次形式的单连通的闭 4 维拓扑流形从光滑范畴排除出去．例如流形 $|E_8|\#|E_8|$ 的相交

二次形式是 $E_8 \oplus E_8$，其号差满足 Rohlin 定理结论之等式，但由 Donaldson 定理，我们断言它是不可光滑化的．这便回答了 §26.4 最后遗留的问题．

这个定理加上 §26.4 中介绍的 Freedman 的理论，产生了惊人的推论：**$\mathbf{R}^4$ 上存在怪异光滑结构**．这是 20 世纪 80 年代数学界最强烈的震撼，我们将在下一节专题介绍．

Donaldson 的这项成就的一个特别引人注目之处是，作为理论物理学的一个分支的规范理论应用于 4 维拓扑而获得重大的本质性进展，这与通常理解的纯粹数学的成果应用于理论物理学的一般程序方向相反，这难道不值得深思吗?!

Donaldson 定理的证明很难，也很长，详细情形读者可参考 [Don 1]，[Don-K]，[Fr-U] 及 [La]．现在介绍其证明梗概于下：

设 M 是一个光滑流形，$\pi: E \to M$ 是一个 k 秩复向量丛，并设 E 上已给了一个 Hermite 度量．$\Gamma(E)$ 表 E 上所有光滑截面之集合，它是一个线性空间，T^*M 表 M 上的余切丛，E 上的一个联络（connection）是一个线性映射 $D: \Gamma(E) = \Omega^0(E) \to \Gamma(T^*M \otimes_{\mathbf{R}} E) = \Omega^1(E)$满足 Leibniz 法则:对于 $s \in \Gamma(E)$和 $f \in C^\infty(M)$有

$$D(fs) = df \otimes s + f\,Ds.$$

D 称为与已给度量相容的,若对任意 $s, t \in \Gamma(E) = \Omega^0(E)$有

$$d\langle s, t\rangle = \langle Ds, t\rangle + \langle s, Dt\rangle.$$

此外我们还采用记号: $\Omega^i(M) = \Gamma(\Lambda^i T^* M)$ 和 $\Omega^i(E) = \Gamma(\Lambda^i T^* M \otimes_R E)$.

给了 E 上的联络 D, 可定义 D 之曲率(curvature) $R^D \in \Omega^2(\mathrm{Hom}(E, E))$如下:

$$R^D = D^1 \circ D : \Omega^0(E) \to \Omega^2(E)$$

其中 $D^1 : \Omega^1(E) = \Gamma(T^* M \otimes_R E) \to \Omega^2(E) = \Gamma(\Lambda^2 T^* M \otimes_R E)$ 为对 $\omega \in \Omega^1(M)$和 $s \in \Omega^0(E)$

$$D^1(\omega\otimes s)=d\omega\otimes s-\omega\wedge Ds.$$

可验证,R^D 关于 $C^\infty(M)$线性.

现在设 M 是一个有向的闭 Riemann 流形，其 Riemann 度量导出 T^*M 上内积，再与 E 之内积导出 $\Lambda^2T^*M\otimes_R\mathrm{Hom}$（$E$，$E$）上内积. 设 D 为 E 上的一个联络，则 Yang-Mills 泛函在 D 上取值定义为

$$\mathscr{YM}(D)=\int_M\|R^D\|^2.$$

今求与度量相容之联络 D 使 $\mathscr{YM}$（D）取临界值. 这种 D 称为自对偶的（self-dual），若使得 R^D 是自对偶 Yang-Mills 方程

$$*R^D=R^D$$

的解，其中 $*$ 是由度量所确定的 Hodge 星号算子（Hodge star）.

记 $\mathscr{C}=$｛与度量相容的所有联络｝，它是一个无限维线性空间. E 上的规范群（gauge group）定义为

$$\mathscr{G}=\Omega^0(\mathrm{Hom}_{\text{metric preserving}}(E,E)).$$

$\mathscr{G}$ 在 $\mathscr{C}$ 上的作用,定义为对 $g\in\mathscr{G}$ 和 $D\in\mathscr{C}$

$$D^g=g\circ D\circ g^{-1}.$$

由此有

$$R^{D^g}=g\circ R^D\circ g^{-1},$$

从而

$$\|R^{D^g}\|^2=\|R^D\|^2,$$

因此

$$\mathscr{YM}(D^g)=\mathscr{YM}(D).$$

于是 Yang-Mills 泛函可对商空间 $\mathscr{B}=\mathscr{C}/\mathscr{G}$ 定义，$\mathscr{B}$ 仍为无限维的，但拓扑学即将显露.

将我们的讨论限于自对偶的联络，记

$$\tilde{\mathscr{M}}=\{D\in\mathscr{C}:*R^D=R^D\}.$$

令

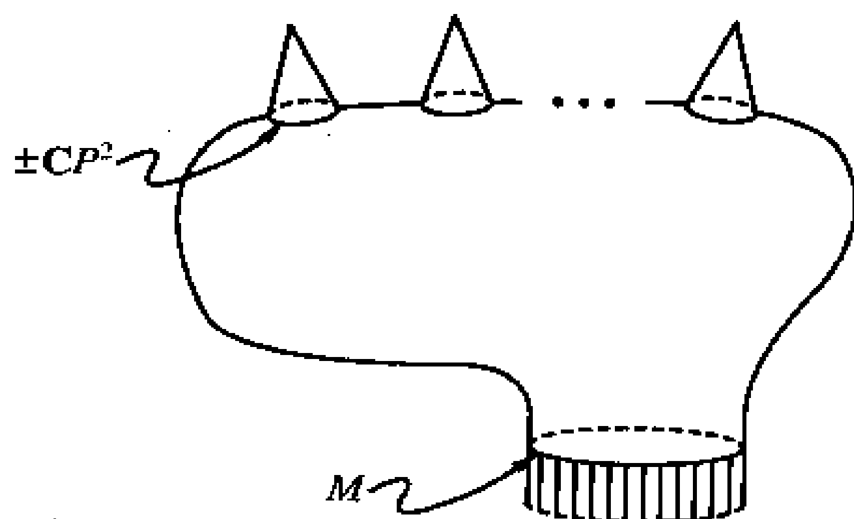
$$\mathscr{M}=\tilde{\mathscr{M}}/\mathscr{G},$$

称为 Hermite 向量丛 E 上自对偶联络之模空间（moduli space）.

现在设 M 是有向的单连通的闭 4 维光滑流形，其相交二次形式 ω_M 是正定的. 设 E 是 M 上以 $SU(2)$ 为结构群的复向量丛，其第二陈类 $c_2(E)=-1$. $\mathscr{M}$ 之意义如上，应用 Atiyah-Singer 指数定理［At-H-S］，可知 $\dim\mathscr{M}=5$.

Donaldson 在 1982 年的论文［Don 1］中，完成以下推理.

经扰动后，$\mathscr{M}$ 是一个带有有限个奇点的可定向的 5 维光滑流形，这些奇点一对一地对应于可约化的联络的等价类，每个奇点有一个 $\mathscr{M}$ 中的邻域，它是 $\pm \mathbf{C}P^2$（$-\mathbf{C}P^2$ 即 $\overline{\mathbf{C}P^2}$）上的一个锥. 又基于 K. Uhlenbeck［U］和 C. Taubes［Ta 1］的工作，Donaldson 证明了 $\mathscr{M}$ 的端（end）是微分同胚于 $M\times(0,1]$. 于是 $\mathscr{M}$ 可图示如下.



若切去开的端及奇点，得一个紧的光滑的可定向的 5 维流形 W，其边缘 ∂W 由两部分组成，一部分微分同胚于 M，另一部分微分同胚于若干个 $\pm\mathbf{C}P^2$ 之不交并，即 M 协边于 $(\pm\mathbf{C}P^2)\sqcup\cdots\sqcup(\pm\mathbf{C}P^2)$.

有多少个 $\pm\mathbf{C}P^2$？答案是：

$\{$可约化的联络等价类$\}\xleftrightarrow{1\text{-}1}$

$$\{\pm \Omega : \Omega \text{ 是自对偶闭 2 形式,使得} \int_M \Omega \wedge \Omega = 1\}$$

$$\xleftrightarrow{1-1} \{\pm u : u \in H^2(M;\mathbf{Z}), u^2 = 1\}.$$

记 m 为可约化的联络等价类的数目，r 为 ω_M 的秩，则有

$$m \leqslant r.$$

因为 ω_M 的号差是 M 的协边不变量，故

$$r = \sigma(M) = \sigma((\pm \mathbf{C}P^2)\sqcup\cdots\sqcup(\pm \mathbf{C}P^2)) \leqslant m.$$

从而知 $m = r$. 由正定性可知

$$\omega_M \sim (1)\oplus\cdots\oplus(1).$$

这就是 Donaldson 定理的结论.

§ 26.6 怪异 $\mathbf{R}^4$ 的存在性

Donaldson 定理结合 Freedman 的理论可以推出 $\mathbf{R}^4$ 上存在怪异的微分结构，这在当时被几位拓扑学家同时认识到. 第一篇发表的是文章 [Gom 1]. 下面介绍 Kirby 的做法，见于 [Fre-L].

在 $\mathbf{C}P^3$ 中代数曲面 $K = \{[z_0, z_1, z_2, z_3] : z_0^4 + z_1^4 + z_2^4 + z_3^4 = 0\}$ 被称作 Kummer 曲面或 $K3$ 曲面. 它是一个单连通的闭 4 维光滑流形,其相交二次形式根据[Sp 2]为

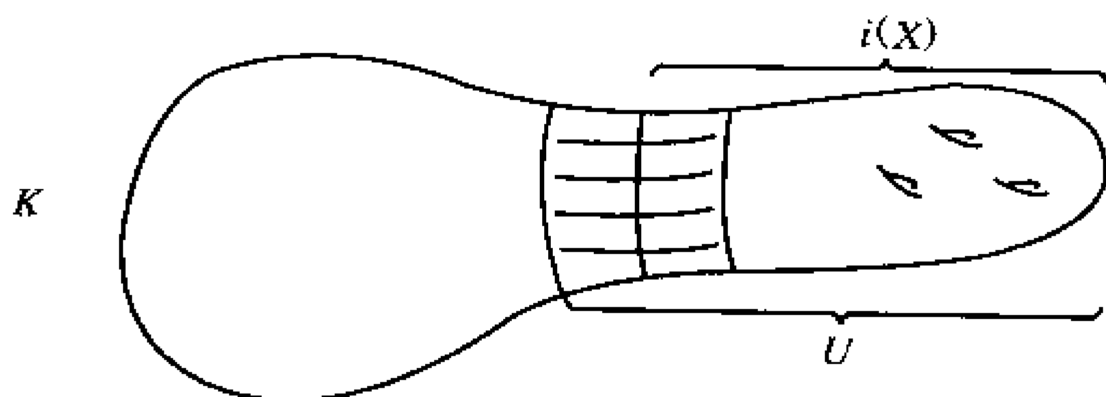
$$\omega_K = 2E_8 \oplus 3\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

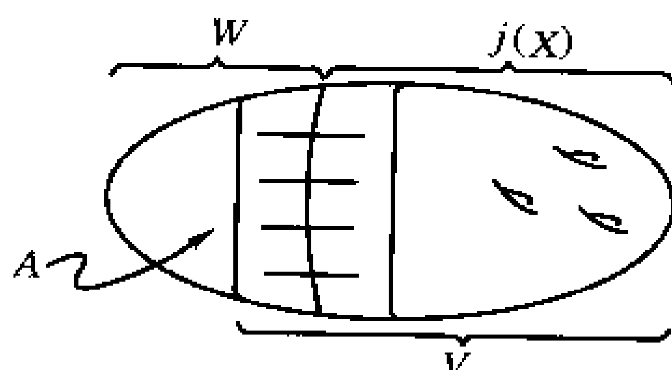
由 Freedman 定理可知,拓扑地

$$K = 2|E_8| \# 3(S^2 \times S^2).$$

令 $X = \# 3(S^2 \times S^2) \setminus$ (开 4 维球体),则 $\partial X = S^3$. 存在一个配领嵌入 $i : X \to K$ 使得 $i(X)$ 表示同调群 $H_2(K)$ 中的 $\oplus 3\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,并且 $i(\partial X)$ 在 K 中有领子 $C(i) \cong S^3 \times (0,1)$ 同时存在另一配领嵌

入 $j: X \to \# 3(S^2\times S^2)$表示$\# 3(S^2\times S^2)$中的同调$\oplus 3\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$,并且 $j(\partial X)$有领子 $C(j)\cong S^3\times(0,1)$,使得 $i(X)$之配领邻域 $U=$





$i(X)\cup C(i)$和 $j(X)$之配领邻域 $V=j(X)\cup C(j)$,当赋以诱导的光滑结构时,是微分同胚的.此外,可选取微分同胚 $\varphi: U\to V$,使得在 X 上 $\varphi\circ i=j$,即下面的图表交换:

$$\begin{array}{ccccc} & & i(X) \to i(X)\cup C(i)=U & \to & K \\ & \overset{i}{\nearrow} & \downarrow \varphi | i(X) & & \downarrow \varphi \\ X & & & & \\ & \underset{j}{\searrow} & j(X) \to j(X)\cup C(j)=V & \to & \# 3(S^2\times S^2). \end{array}$$

令 $W=\# 3(S^2\times S^2)\setminus j(X)$.我们有以下两个断言:

(1) W 同胚于 $\mathbf{R}^4$. 这由 Freedman 的文章 [Fre 3] 中的 5 维正常 h 协边定理推出. 任一非紧的无边 4 维流形 W, 若是单连通的, 满足 H_2 (W; $\mathbf{Z}$) $=0$ 并且只有一个同胚于 $S^3\times$ [0,

$+\infty$) 的端，则 W 同胚于 $\mathbf{R}^4$.

(2) W 赋以诱导的光滑结构，不微分同胚于赋以标准微分结构的 $\mathbf{R}^4$. 证明如下：

取$A = \# 3(S^2 \times S^2) \setminus V$,它是 W 中一个紧集. 我们将证明：不存在从 S^3 到 W 的光滑嵌入，将 A 包含于其内部. 这个反常的性质推出了结论 (2)，即 W 是一个怪异的 $\mathbf{R}^4$.

设相反地，这种光滑嵌入存在. 取光滑嵌入 $h: S^3 \to W$ 使得$A \subset h(S^3)$的内域.则 $\varphi^{-1}(h(S^3))$是 K 中一个光滑嵌入的 3 维球面,它分裂 $C(i)$之两端.从而分裂 K 为两部分,K'和 H.它们都是带边的光滑流形，它们的边缘微分同胚于标准的 S^3. 设 K'是其 2 维同调为 $E_8 \oplus E_8$ 的那部分. 因此在 K'的边缘上用 $\varphi^{-1} \circ h$ 粘上一个 4 维闭球体，就得到一个单连通的闭的光滑的 4 维流形

$$Y = K' \cup_{\varphi^{-1} \circ h} D^4.$$

它的相交二次形式是 $E_8 \oplus E_8$. 这与 Donaldson 定理矛盾!

实际上我们还可以证明更多. 若将 W 换成沿$C(j)$中按参数 $t \in (0,1)$的截口切开之图中的左侧部分 W_t.则 W_t 同样有结论(1)和(2)，即 W_t 赋以诱导的光滑结构是同胚于 $\mathbf{R}^4$ 但不微分同胚于赋以标准的光滑结构的 $\mathbf{R}^4$，或说每个 W_t 都是一个怪异的 $\mathbf{R}^4$. 重要的是，若 s，$t \in (0, 1)$ 而 $s \neq t$，则

$$W_s \overset{DIFF}{\not\cong} W_t.$$

因此至少得到一个实数参数化的互相不微分同胚的怪异 $\mathbf{R}^4$. 这个结论的证明要用到 Taubes 的 [Ta 2] 中的一个定理，它是将 Donaldson 定理推广到具有周期性端的情形.

R. Gompf 是 1983 年第一个发表怪异 $\mathbf{R}^4$ [Gom 1] 的人，他在 1985 年得到两个实参数化的怪异 $\mathbf{R}^4$ [Gom 2]. Ž. Bižaca 于 1994 年第一次为怪异 $\mathbf{R}^4$ 给出环柄体剖分 [Biz]，而 Freedman 和 L. Taylor 构作了 $\mathbf{R}^4$ 的一个万有光滑化 U，使得 $\mathbf{R}^4$ 的任何光

滑化均可光滑地嵌入 U 中 [Fre-T].

进而人们会问一个很一般的问题：是否每一个非紧的光滑 4 维流形有不可数多个不同的光滑化？Gompf 于 1993 年证明 [Gom 3] 将 4 维流形 M 去掉一个点以后，$M \setminus pt$ 有不可数多个光滑化. 丁帆 [Din 1, 2] 则得到了普遍得多的结果. 但问题尚远未解决.

关于闭 4 维光滑流形上是否有不同的光滑结构的问题，早期的重要结论是 1970 年由 J. Cheeger 和 Kister [Chee-K] 证明的：充其量只存在可数多个紧 4 维光滑流形. 后来发现，当 $n=9$，…时，$\mathbf{C}P^2 \# n\overline{\mathbf{C}P^2}$ 上有怪异的光滑结构等. 但 S^4 上是否有怪异的光滑结构，是人们最希望知道而迄今尚无答案的挑战性问题之一.

§26.7 规范理论的新发展及其应用

Donaldson 的成就开启了运用规范不变量于 4 维拓扑的一个高潮. 20 世纪 80 年代以后的一批新进的 4 维流形研究者，多数是走的这条路子，并获得大量成果. 到 1994 年秋冬之交，N. Seiberg 和 E. Witten [Wit] 提出了一个新的单极子方程，Seiberg-Witten 方程，发展了规范理论. 这个新理论立即显示出较强的威力，因为应用 Seiberg-Witten 不变量，P. B. Kronheimer 和 T. S. Mrowka 立即解决了一个长期悬而未决的著名的 Thom 猜测 [Kr-M]：$\mathbf{C}P^2$ 中光滑嵌入的代表着同一个同调类的有向闭曲面中，以其中的代数曲面的亏格为最小. 接着于 1995 年 M. Furuta 应用 Seiberg-Witten 不变量，将另一个长期无法解决的著名的 11/8 猜测推进了一大步. 11/8 猜测说：给定一个光滑的闭 Spin 4 维流形 M，使得 $H_1(M; \mathbf{Z})=0$，则 $\beta_2/|\sigma|$

$\geqslant 11/8$，其中 β_2 为 M 的第二个 Betti 数，而 σ 是 M 的号差．Furuta 证明［Fu］：$\beta_2/|\sigma|>10/8$．

目前这个领域尚方兴未艾，关于已经获得的进展读者可参考［Sal］．

附　　录

Fields 奖得主中的拓扑学家

Fields 奖自 1936 年开始至 1998 年共有 42 人获此殊荣，其中有十三位是全部或部分因拓扑学研究的贡献而获奖.

下面列出这 13 位的获奖时间，姓名，获奖研究领域，及与本书有关系的部分.

1954：J-P. Serre，代数拓扑，第十一，十四章

1958：R. Thom，代数拓扑与微分拓扑，第十二，十七章

1962：J. Milnor，代数拓扑与微分拓扑，第十一，十九，二十一，二十二，二十三，二十四，二十五章

1966：M. Atiyah，代数拓扑与代数几何，第十八，二十一章

A. Grothendieck，代数几何与同调代数，第六，二十一章

S. Smale，微分拓扑与微分动力系统，第二十章

1970：S. P. Novikov，代数拓扑，微分拓扑与代数 K 理论，第二十一，二十二，二十三章

1978：D. G. Guillen，代数拓扑，代数 K 理论与同调代数，第二十一章

1982：W. Thurston，三维流形几何拓扑与叶状结构，第二十五章

1986：S. K. Donaldson，4 维拓扑，第二十六章

M. Freedman，4 维拓扑，第二十六章

1990：V. Jones，纽结理论，第二十四章

1998：M. L. Kontsevich，纽结理论，第二十四章

参考文献

[Ad 1] J.F.Adams, On the non-existence of elements of Hopf-invariant one, Ann. of Math., 72(1960)20-104

[Ad 2] J.F.Adams, Algebraic Topology: A Student's Guide, Lond. Math. Soc. Lect. Notes Series 4, Cambridge Univ. Press, London, 1972

[Ade] J.Adem, The iteration of the Steenrod squares in algebraic topology, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 38(1952)720-724

[Ak-Mc] S.Akbulut and J.McCarthy, Casson's invariant for oriented homology 3-sphere, An Exposition. Math. Notes, 36, Princeton, NJ, 1990

[Al 1] J.W.Alexander, A proof of the invariance of certain constants of analysis situs, Trans. Amer. Math. Soc., 16(1915)148-154

[Al 2] J.W.Alexander, Note on two three-dimensional manifolds with the same group, Trans. Amer. Math. Soc., 20(1919)330-349

[Al 3] J.W.Alexander, Note on Riemann surfaces, Bull. Amer. Math. Soc., 64(1920)370-372

[Al 4] J.W.Alexander, A proof and extension of the Jordan-Brouw-

er separation theorem, Trans. Amer. Math. Soc. ,23(1922)333-349

[Al 5] J.W.Alexander, A lemma on systems of knotted curves, Proc. Nat. Acad. Sci. USA,9(1923)93-95

[Al 6] J.W.Alexander, An example of a simply connected surface bounding a region which is not simply connected, Proc. Nat. Acad. Sci. USA,10(1924)8-10

[Al 7] J.W.Alexander, New toplogical invariants expressible as tensors, Proc. Nat. Acad. Sci. USA,10(1924)99-101

[Al 8] J.W.Alexander, Combinatorial Ananlysis Situs, Trans. Amer. Math. Soc. 8(1926)301-329

[Al 9] J.W.Alexander, Topological invariants of knots and links, Trans. Amer. Math. Soc. ,30(1928)275-306

[Al 10] J.W.Alexander, The combinatorial theory of complexs, Ann. of Math. ,31(1930)294-322

[Al 11] J.W.Alexander, Some problems in topology, Verhandlungen des Internationalen Mathematiker Kongresses, Zurich, 1932, vol. 1,249-257

[Al 12] J.W.Alexander, On the chains of a complex and their duals, Proc. Nat. Acad. Sci. USA,21(1935)509-511

[Al 13] J.W.Alexander, On the ring of a compact metric space,

Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 21(1935)511-512

[Al 14] J. W. Alexander, On the connectivity ring of an abstract space, Ann. of Math., 37(1936)698-708

[Al 15] J. W. Alexander, A theory of connectivity in terms of gratings, Ann. of Math., 39(1938)883-912

[Al-B] J. W. Alexander and G. B. Briggs, On types of knotted curves, Ann. of Math., 28(1927)562-586

[Al-V] J. W. Alexander and O. Veblen, Manifolds of n demensions, Ann. of Math., 14(1913)163-178

[Af 1] P. S. Alexandroff, Über kombinatorische Eigenschaften allgemeiner Kurven, Math. Ann., 96(1926)512-554

[Af 2] P. S. Alexandroff, Über die Dualität zwischen den Zusammenhang einer abgeschlossenen Menge und des zu ihr komplementären Räumer, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, 1927, 323-329

[Af-H] P. S. Alexandroff and H. Hopf, Topologie I, Springer, Berlin, 1935

[Af-P] P. S. Alexandroff and L. S. Pontrjagin, Les varietes a n dimensions generalisees, C. R. Acad. Sci, Paris, 202(1936)1327-1329

[Ap-H] K. Appel and W. Haken, Every planar map is four col-

orable, Bull. Amer. Math. Soc., 82(1976)711-712

[Ar 1] E. Artin, Theorie der Zöpfe, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 4(1925)45-72

[Ar 2] E. Artin, Theory of Braids, Ann. of Math., 48(1947)101-126

[Ar-F] E. Artin and R. Fox, Some wild cells and spheres in three-dimensional space, Ann. of Math., (2)49(1948)979-990

[At 1] M. Atiyah, K-theory, Benjamin, New York, 1967

[At 2] M. Atiyah, Geometry of Yang-Mills Fields, Accad. Naz. Lincei, Piza, 1979

[At-H 1] M. Atiyah and F. Hirzebruch, Riemann-Roch theorem for differentiable manifolds, Bull. Amer. Math. Soc., 65(1959)276-281

[At-H 2] M. Atiyah and F. Hirzebruch, Vector bundles and homogeneous spaces, Proc. Symp. Pure Math., III: Differential Geometry, Amer. Math. Soc., 1961, 7-38

[At-H-S] M. Atiyah, N. Hitchin and I. Singer, Self-duality in Four-dimensional Riemannian geometry, Proc. Roy. Soc. London A 362(1978)425-461

[At-S 1] M. Atiyah and I. M. Singer, The index of elliptic opera-

tors on compact manifolds, Bull. Amer. Math. Soc., 69(1963)422-433

[At-S 2] M. Atiyah and I. M. Singer, The index of elliptic operators III, Ann. of Math., 87(1968)546-604

[Av] S. Averbukh, The algebraic structure of the intrinsic homology groups, Dokl. Akad. Nauk USSR, 125(1959)11-14

[B] M. Barrat, Track groups I, II, Proc. Lond. Math. Soc., 5(1955) 71-106 and 285-329

[B-M] M. Barrat and J. Milnor, An example of anomalous singular homology, Proc. Amer. Math. Soc., 13(1962)293-297

[Ba 1] H. Bass, K-theory and stable algebra, Publ. Math. Inst. HES, 22(1964)5-60

[Ba 2] H. Bass, Algebraic K-Theory. Benjamin, 1968

[Be] J. Bertrand, Remarque a l'occasion de la note precedente, C. R. Acad. Sci. Paris, 50(1860)781-782

[Bet] E. Betti, Sopra gli spazi di un numero qualunque di dimensioni, Annali Mat. Pura Appl., (2), 4(1871)140-158

[Bi 1] R. H. Bing, Necessary and sufficient conditions that a 3-manifold be 3-sphere, Ann. of Math., 68(1958)17-37

[Bi 2] R. H. Bing, An alternative proof that 3-manifolds can be triangulated, Ann. of Math., 69(1959)37-65

[Bi 3] R. H. Bing, Some aspects of the topology of 3-manifolds related to the Poincare conjecture, Lectured on Modern Mathematics II, John Wiley & Sons Inc., New York-London-Sydney, 1964, 93-128

[Bi 4] R. H. Bing, The Geometric Topology of 3-manifolds, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1983

[Bir 1] G. D. Birkhoff, Collected Mathematical Papers, II, Amer. Math. Soc., New York, 1950

[Bir 2] G. D. Birkhoff, Dynamical systems with two degrees of freedom, Trans. Amer. Math. Soc., 18(1917)96-115

[Bir-K] G. D. Birkhoff and O. Kellogg, Invariant points in function space, Trans. Amer. Math. Soc., 23(1922)96-115

[Birm] J. Birman, Braids, links and mapping class groups, Ann. of Math. Studies 82, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1974

[Birm-L] J. Birman and X.-S. Lin,, Knot polynomials and Vassiliev's invariants, Invent. Math. 111(1993)225-270

[Biz] Ž. Bižaca, A handle decomposition of an exotic R^4, J. Diff. Geom., 39(1994)491-508

[Bock] M. F. Bockstein, Universal systems of ∇-homology rings, Dokl. Akad. Nauk USSR, 37(1942)243-245

[Boh] F. Bohnenblust, The algebraic braid group, Ann. of Math., 48(1947)127-136

[Bol] V. A. Boltyanskii, Homotopy theory of continuous mappings and vector fields, Trudy Mat. Inst. Steklov No. 47, Izd, Akad. Nauk USSR, Moscow, 1955

[Bon] P. O. Bonnet, Mémoire sur la théorie générale des surfaces. J. de l'École Poly., Tome 19, Cahier 32(1848)1-146

[Bor 1] A. Borel, Cohomologie des espaces localement compacts, d'après J. Leray, Sém. de Top. Alg., ETH, Lect. Notes 2, 1964

[Bor 2] A. Borel, Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espace homogènes des groupes de Lie compacts, Ann. of Math., 57(1953)115-207

[Bor 3] A. Borel, Sur l'homologie et la cohomologie des groupes de Lie compacts connexes, Amer. J. Math., 76(1954)273-342

[Bor 4] A. Borel, Kählerian coset space of semi-simple Lie groups, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 140(1954)1147-1151

[Bor 5] A. Borel, Sur la torsion des groupes de Lie, J. Math. Pures et Appl. 35(1955)477-489

[Bor 6] A. Borel. Seminar on transformation groups, Princeton Univ. Press, 1960

[Bor-C] A. Borel and C. Chevalley, The Betti numbers of the exceptional groups, Memoirs Amer. Math. Soc., 14(1955)1-9

[Bor-H] A. Borel and F. Hirzebruch, Characteristic classes and homogeneous spaces, I, Amer, J. Math., 80(1958)458-538

[Bor-S 1] A. Borel and J.-P. Serre, Impossibilité de fibrer un espace euclidien par des fibres compactes, C. R. Acad. Sci. Paris, 230(1950) 2258-2260

[Bor-S 2] A. Borel and J.-P. Serre, Groupes de Lie et puissances réduites de Steenrod, Amer. J. Math., 73(1953)409-448

[Bor-S 3] A. Borel and J.-P. Serre, La théorème de Riemann-Roch, Bull. Soc. Math. France, 86(1958)97-136

[Bors 1] K. Borsuk, Sur les rétractes, Fund. Math., 17(1931)152-170

[Bors 2] K. Borsuk, Über eine Klasse von lokal zusammenhängende Räume, Fund. Math., 19(1932)230-240

[Bors 3] K. Borsuk, Zur kombinatorischen Eigenschaften des Retraktes, Fund. Math., 21(1933)91-98

[Bors 4] K. Borsuk, Über den Lusternik-Schnirelmann Begriff der

Kategorie, Fund. Math., 26(1936)123-136

[Bors 5] K. Borsuk, Sur les groupes des classes de transformations continues, C. R. Acad. Sci. Paris, 202(1936)1400-1403

[Bors 6] K. Borsuk, Sur les prolongements des transformations continues, Fund. Math., 28(1937)99-103

[Bot 1] R. Bott, On torsion in Lie groups, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 40(1954)586-588

[Bot 2] R. Bott, An application of the Morse theory to the topology of Lie groups, Bull. Soc. Math. France, 84(1956)251-281

[Bot 3] R. Bott, The space of loops on a Lie group, Mich. Math. J., 5(1958)35-61

[Bot 4] R. Bott, The stable homotopy of the classical groups, Ann. of Math., 70(1959)313-337

[Bot 5] R. Bott, Quelques remarques sur les théorèmes de périodicité, Bull. Soc. Math. France, 187(1959)293-310

[Bot 6] R. Bott, A report on the unitary group, Proc. Symp. Pure Math., Vol. III 1-6, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1961

[Bot 7] R. Bott, Lectures on K(X), Benjamin, 1969

[Bot-M] R. Bott and J. Milnor, On the parallelizability of spheres,

Bull. Amer. Math. Soc., 64(1958)87-98

[Bot-Sa 1] R. Bott and H. Samelson, On the cohomology ring of G/T, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 41(1955)490-493

[Bot-Sa 2] R. Bott and H. Samelson, Applications of the theory of Morse to symmetric spaces, Amer. J. Math., 80(1958)964-1029

[Bou] N. Bourbaki, Topologie Générale, Eléments de Mathématique, Hermann, Paris, 1971

[Bra 1] R. Brauer, Über Zusammenhange zweischen arithmetischen und invarianten-theoretischen Eigenschaften von Gruppen linearer Substitutionen, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. (1926)410-416

[Bra 2] R. Brauer, Sur les inavariants intégraux des variétés des groupes de Lie simples clos, C. R. Acad. Sci. Paris(1935), 419-420

[By] E. J. Brody, The topological calssification of lens spaces, Ann. of Math., 71(1960)163-184

[Br 1] L. E. J. Brouwer, Beweis der Invarianz der Dimensionzahl, Math. Ann., 70(1911)161-165

[Br 2] L. E. J. Brouwer, Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten, Math. Ann., 71(1912)97-115

[Br 3] L. E. J. Brouwer, Beweis der Invarianz des n-dimensionalen Gebiets. Math. Ann., 71(1912)305

[Br 4] L. E. J. Brouwer, Beweis des Jordanschen Satzes fur den n-dimensionalen Räum, Math. Ann. ,71(1912)314

[Br 5] L. E. J. Brouwer, Zur Invarianz des n-dimensionalen Gebiets, Math. Ann. 73(1913)55

[Br 6] L. E. J. Brouwer, Collected Works I, North Holland, Amsterdam, 1975

[Br 7] L. E. J. Brouwer, Collected Works II, North Holland , Amsterdam, 1976

[Brd 1] W. Browder, Manifolds with $\pi_1 = Z$, Bull. Amer. Math Soc. ,72(1966)238-244

[Brd 2] W. Browder, Surgery on simply-connected manifolds, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1972

[Bro] K. S. Brown, Cohomology of Groups, Springer, New York-Heidelberg-Berlin, 1982

[Bru] H. Brunn, Über verknotet Curven, Verh. des intern. Math. Congr. 1(1897)256-259

[Bu] W. Burau, Kennzeichnung der Schlauchknoten, Abn. Math. Sem. Univ. Hamburg, 9(1933)125-133

[Bur-Z] G. Burde and H. Zieschang, Knots, de Gruyter Studies in

Mathematics 5, Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1985

[C 1] S. S. Cairns, The cellular division and approximation of regular spreads, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 16(1930)488-490

[C 2] S. S. Cairns. On the triangulation of regular loci, Ann. of Math., 35(1934)579-587

[C 3] S. S. Cairns. Homeomorphisms between topological manifolds and analytic manifolds, Ann. of Math., 41(1940)796-808

[C 4] S. S. Cairns, Introduction of a Riemannian geometry on a triangulable 4-manifold, Ann. of Math., 45(1944)218-219

[C 5] S. S. Cairns, The triangulation problem and its role in analysis, Bull. Amer. Math. Soc., 52(1946)545-571

[CE 1] E. Cartan, Leçons sur les Invariants Intégraux, Hermann, Paris, 1922

[CE 2] E. Cartan, Sur les nombres de Betti des espasces de groupes clos, C. R. Acad. Sci. Paris, 187(1928)196-198

[CH 1] H. Cartan, Méthodes modernes en Topologie algébrique, Comment. Math. Helv., 18(1945)425-427

[CH 2] H. Cartan, Sur la notion de carapace en topologie algébrique, Coll. top. alg. C. N. R. S. Paris(1947), 1-2

[CH 3] H. Cartan, Séminar H. Cartan de l'ENS, 1948-1950: Homotopie, espaces fibrés, Secr. math., 11, R. P. Curie, Paris

[CH 4] H. Cartan, Une théorie axiomatique des carrés de Steenrod, C. R. Acad. Sci. Paris, 230(1950)425-427

[CH 5] H. Cartan, Seminar H. Cartan de l'ENS, 1959-1960: Périodicité des groupes d'homologie stables des groupes classiques, d'après Bott, Secr. math., 11, R. P. Curie, Paris

[CH-Ei] H. Cartan and S. Eilenberg, Homological Algebra, Princeton Univ. Press, 1956

[Cas] A. J. Casson, Three lectures on new infinite constructions in 4-dimensional manifolds, A la Recherche de la topologie Perdue, Progress in Math., Vol. 62, Birkhäuser, Boston-Basel-Stuttgart, 1986, 201-244

[Cau] A. Cauchy, Recherches sur les polyèdres, 1er memoire, J. Ec. Polyt., 9(1813)68-86

[Cay] A. Cayley, Proc. Royl Geograph. Soc. 1(1879)259-261

[Cec 1] E. Čech, Théorie générale de l'homologice dans un espace quelcoque, Fund, Math., 19(1932)149-183

[Cec 2] E. Čech, Höherdimensionalen Homotopiegruppen, Verhanl. des intern. Math. Kongresses, Zurich 1932, Bd. 2, 203

[Cec 3] E. Čech, Théorie générale des variétés et de leurs théorèmes de dualité, Ann. of Math., 34(1933)621-730

[Cec 4] E. Čech, Sur les nombres de Betti locaux, Ann. of Math., 35 (1934)678-701

[Cec 5] E. Čech, Multiplications on a complex, Ann. of Math., 37 (1936)681-697

[Ch 1] S. C. Chang, Homotopy invariants and continuous mappings, Proc. Roy. Soc. A 202(1950)253-263

[Ch 2] S. C. Chang, Some suspension theorems, Quart. J. Math. (Oxford), (2), 2(1950)310-317

[Chee-K] J. Cheeger and J. M. Kister, Counting topological manifolds, Topology 9(1970)149-151

[Che 1] S. S. Chern, Characteristic classes of hermitian manifolds, Ann. of Math., 47(1946)85-121

[Che 2] S. S. Chern, On the multiplication in the characteristic ring of a sphere bundle, Ann. of Math., 49(1948)362-372

[Che-H-S] S. S. Chern, F. Hirzebruch and J.-P. Serre, On the index of a fibered manifold, Proc. Amer. Math. Soc., 8(1957)587-596

[Che-Sp] S. S. Chern and E. Spanier, The homology structure of fibre bunles, Proc. Nat Acad. Sci. USA, 36(1950)248-255

[Che-Su] S. S. Chern and Y. Sun, The imbedding theorem for fibre bundles, Trans. Amer. Math. Soc., 67(1949)286-303

[Chev] C. Chevalley, Theory of Lie Groups, Princeton Univ. Press, 1946

[Cho] W.-L. Chow, On the algebraic braid group, Ann. of Math., (2)49(1948)654-658

[Cl] W. K. Clifford, On the canonical form and dissection of a Riemann Surface, Proc. Lond. Math. Soc., 8(1977)

[Co] M. M. Cohen, A Course in Simple-Homotopy Theory, Springer, New York-Heidelberg-Berlin, 1973

[Con] J. Conway, An enumeration of knots and links and some of their related properties, Computational Problems in Abstract Algebra, Proc, Conf. Oxford 1967, 329-358, Pergamon Press, New York, 1970

[Cr-F] R. Crowell and R. Fox, Introduction to knot theory, Grad, Texts Math. 57 Springer, New York-Heidelberg-Berlin, 1963

[Cu-F-H-S] C. L. Curtis, M. H. Freedman, W. C. Hsiang and R. Stong, A decomposition theorem for h-cobordant smooth simply-connected compact 4-manifolds, Invent. Math., 123(1996)343-348

[D 1] M. Dehn, Über die Topologie des dreidimonsional Räumes,

Math. Ann., 69(1910)137-168

[D 2] M. Dehn, Über unendliche diskontinuierliche Gruppen, Math. Ann., 71(1912)116-144

[D 3] M. Dehn, Die beiden Kleeblattschlingen, Math. Ann. 75 (1914)402-413

[D-H] M. Dehn and P. Heegaard, Analysis Situs, Enzykl. der math. Wiss., III 1 AB 3, Teubner, Leipzig, 1907

[De] R. Descartes, Œuvres inédites de Descartes, par le comte Foucher de Careil, Paris, A. Durand, 1859, t. 2

[Di 1] J. Dieudonné, A Panorama of Pure Mathematics, Acad. Press, New York-London, 1982

[Di 2] J. Dieudonné, A History of Algebraic and Differential Topology, Birkhäuser, Boston, 1989

[Din 1] F. Ding, Smooth structures on some open 4-manifolds, Topology 36(1996)203-207

[Din 2] F. Ding, Uncountably many smooth structures on some 4-manifolds, Proc. Int. Conf. Manifolds and Singularities, Bejing 1995, 161-167

[Db] P. Dolbeault, Sur la cohomologie des variétés analytiques complexes, C. R. Acad. Sci. Paris, 236(1953)175-177

[Do 1] A. Dold, Erzeugende der Thomschen Algebra $\mathfrak{N}$, Math. Zeitschr. ,65(1956)25-35

[Do 2] A. Dold, Démonstration élémentaire de deux résultats du cobordisme, Sém. Ehresmann, 1959,

[Do 3] A. Dold, Lectures on Algebraic Topology, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1980

[Don 1] S. K. Donaldson, An application of gauge theory to four dimensional topology, J. Diff. Geom. ,18(1983)279-315

[Don 2] S. K. Donaldson, Connections, cohomology, and the intersection forms of 4-manifolds, J. Diff. Geom. ,24(1986)275-341

[Don-K] S. K. Donaldson and P. B. Kronheimer, The Geometry of Four-Manifolds, Clarendon Press, Oxford, 1990

[D-M] M. Dornergue et Y. Mathieu, Noeuds dans les 3-variétés à bord qui ne sont pas déterminés par leur complément, C. R. Acad. Sci, Paris, 310(1990),595-597

[Dy] W. Dyck, Beiträge zur Analysis situs I, Math. Ann. ,32(1888) 457-512

[E 1] B. Eckmann, Zur Homotopietheorie gefaserter Räume, Comment. Math. Helv. ,14(1941-1942)141-192

[E 2] B. Eckmann, Coverings and Betti numbers, Bull, Amer, Math. Soc., 55(1949)95-101

[E 3] B. Eckmann, Espaces fibrés et homotopie, Coll. de Topologie (espaces fibrés) Bruxelles, 1950, C. R. B. M., Liége et Paris, 1951, 83-99

[E 4] B. Eckmann, Homotopy and cohomology theory, Proc. Int. Congress of Math., Stockholm 1962, Inst. Mittag-Leffler, 1963, 59-73

[Eh 1] C. Ehresmann, Sur la topologie de certaines espaces homogènes, Ann. of Math., 35(1934)396-443

[Eh 2] C. Ehresmann, Sur la topologie de certaines variétés algébriques réelles J. Math. Pures Appl, 16(1937)69-100

[Eh 3] C. Ehresmann, Espaces fibrés associese, C. R. Acad. Sci. Paris, 213(1941)762-764

[Eh 4] C. Ehresmann, Espaces fibrés de structures comparables, C. R. Acad. Sci. Paris, 214(1942)144-147

[Eh 5] C. Ehresmann, Sur les applications continues d'un espace dans un espace fibré ou dans un revêtement, Bull, Soc. Math. France, 72(1944)37-54

[Eh 6] C. Ehresmann, Sur les espaces fibrés diferrentiables, C. R. Acad. Sci. Paris, 224(1947)1611-1612

[Eh-F] C. Ehresmann and J. Feldbau, Sur les propriétés d'homotopie des espaces fibrés, C. R. Acad. Sci, Paris, 212 (1941) 945-948

[Ei 1] S. Eilenberg, On the relation between the fundamental group and the higher homotopy groups, Fund. Math., 32(1939)167-175

[Ei 2] S. Eilenberg, Cohomology and Continuous Mappings, Ann. of Math., 42(1940), 231-260

[Ei 3] S. Eilenberg, Extension and classification of continuous mappings, Lectures in Topology, Conf. at Univ. of Michigan, 1940, Univ. of Michigan Press, 1941, 57-99

[Ei 4] S. Eilenberg, Singular homology, Ann. of Math., 45(1944) 407-447

[Ei 5] S. Eilenberg, Homology of spaces with operators, I, Trans. Amer. Math. Soc. 61(1947)378-417

[Ei 6] S. Eilenberg, Singular homology in differential manifolds, Ann. of Math. 48(1947)670-681

[Ei 7] S. Eilenberg, On the problems of topology, Ann. of Math., 50(1949)247-260

[Ei-M 1] S. Eilenberg and S. Mac Lane, Group extensions and homology, Ann. of Math. 43(1942)758-831

[Ei-M 2] S. Eilenberg and S. Mac Lane, Natural isomorphisms in group theory, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 28(1942)537-543

[Ei-M 3] S. Eilenberg and S. Mac Lane, Relations Between homology and homotopy groups, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 29(1943)155-158

[Ei-M 4] S. Eilenberg and S. Mac Lane, General theory of natural equivalences Trans. Amer. Math. Soc., 58(1945)231-294

[Ei-M 5] S. Eilenberg and S. Mac Lane, Relations between homology and homotopy groups of spaces, I, Ann, of Math., 46(1945)480-509

[Ei-M 6] S. Eilenberg and S. Mac Lane, Determination of the second homology and cohomology groups of a space by means of homotopy invariants, Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 32(1946)277-280

[Ei-M 7] S. Eilenberg and S. Mac Lane, Homology of spaces with operations, II, Trans. Amer. Math. Soc., 65(1949)49-99

[Ei-M 8] S. Eilenberg and S. Mac Lane, Relations between homology and homotopy groups of spaces, II, Ann. of Math., 51(1950)514-533

[Ei-M 9] S. Eilenberg and S. Mac Lane, Cohomology theory of abelian groups and homotopy theory, I, II, III, IV, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 36(1950)443-447, 36(1950)657-663, 37(1951)307-310,

38(1952)325-329

[Ei-M 10] S. Eilenberg and S. Mac Lane, Acyclic models, Amer. J. Math., 79(1953)189-199

[Ei-Mo] S. Eilenberg and J. C. Moore, Homology and fibrations, I, Comment. Math. Helv., 40(1966)201-236

[Ei-S 1] S. Eilenberg and N. Steenrod, Axiomatic approach to homology theory, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 31(1945)177-180

[Ei-S 2] S. Eilenberg and N. Steenrod, Foundation of Algebraic Topology, Princeton Univ. Press, 1952

[Ei-Z] S. Eilenberg and J. Zilber, On products of complexes, Amer. J. Math., 75(1953)200-204

[Ep 1] D. Epstein, Finite presentations of groups and 3-manifolds, Quart. J. Math. Oxford, 12(1961)205-212

[Ep 2] D. Epstein, Projective planes in 3-manifolds, Proc. London Math. Soc., (3)11(1961)469-484

[Ep 3] D. Epstein, Periodic flows on 3-manifolds, Ann. Math. 95 (1972)66-82

[Eu 1] L. Euler, Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis, Comment. acad. sci. Petrop. t. 8, 1736, Saint-Petersbourg, 1741, 128-140

[Eu 2] L. Euler, Elementa doctrinae solidorum, Novi comment. acad. sc. Petrop. ,4(1752-1753)109-140

[Eu 3] L. Euler, Demonstratio nonnularum insignium proprietatum, quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita, Novi comment. acad. sc. Petrop. ,4(1752-1753)140-160

[Eu 4] L. Euler, Leonard Euler und Christian Goldbach, Briefwechsel 1729-1764, Akademie-Verlarg, Berlin, 1965.

[Ev] B. Evans, Boundary respecting maps of 3-manifolds, Pacific J. Math. ,42(1972)639-655

[Ev-M] B. Evans and L. Moser, Solvable fundamental groups of compact 3-manifolds, Trans. Amer. Math. Soc. ,(1972)189-210

[F 1] I. Fary, Sur la courbure total d'une courbe gauche faisant un noeud, Bull. Soc. Math. France. 77(1949)128-138

[F 2] I. Fary, Sur une nouvelle démonstration de l'unicité de l'algèbre de cohomologie à supports compacts d'un espace localement compact, C. R. Acad. Sci. Paris, 237(1953)552-554

[Fo 1] R. Fox, On the Lusternik-Schnirelmann category, Ann. of Math. ,42(1941)333-370

[Fo 2] R. Fox, On homotopy type and deformation retracts, Ann. of Math. ,44(1943)40-50

[Fo 3] R. Fox, Recent developement of knot theory at Princeton, Proc. Int. Conf. Math., 1950, Cambridge, Mass., Amer. Math. Soc. II, 453-457

[Fo 4] R. Fox, Free differential calculus II, The isomorphism problem, Ann. of Math., 59(1954)196-210

[Fo 5] R. Fox, A quick trip through knot theory, Topology of 3-manifolds and related topics, 120-167, Prentice-Hill, Englewood, NJ, 1962

[Fr-U] D. S. Freed and K. K. Uhlenback, Instantons and Four-Manifolds, MSRI Publications, Springer, New York, 1984

[Fre 1] M. Freedman, Surgery on codimension 2 submanifolds, Memoirs of Amer. Math. Soc., 191(1977)

[Fre 2] M. Freedman, A fake $S^3 \times R$, Ann. of Math., 110(1979) 177-201

[Fre 3] M. Freedman, The topology of Four-dimensional manifolds, J. Diff. Geom., 17(1982)357-454

[Fre 4] M. Freedman, The disk theorem for four-dimensiona manifolds, Proc. Intern. Congress Math. 1983, 647-663

[Fre-H] M. Freedman and Z.-X. He, Divergence-free fields: energy and asymptotic crossing number, Ann. of Math., (2)134(1991)189-

[Fre-L] M. Freedman and F. Luo, Selected Applications of Geometry to Low-Dimensional Topology, Univ. Lecture Series, No. 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989

[Fre-T] M. Freedman and L. Taylor, A universal smoothing of four space, J. Diff. Geom., 24(1986)69-78

[Fre-Q] M. Freedman and F. Quinn, Topology of Four-Manifolds, Clarendon Press, Oxford, 1990

[Freu 1] H. Freudenthal, Über die Klassen von Sphärenabbildungen, Comp. Math., 5(1937)299-314

[Freu 2] H. Freudenthal, Die Triangulation der differenziehbaren Manngfaltigkeiten, Proc. Akad. Wetensch. Amsterdam, 42 (1939), 880-901

[Fu] M. Furuta, Monopole equation and the 11/8-conjecture, Preprint RIMS, Kyoto 1995

[G 1] C. F. Gauss, Disquisitiones generales circa superficies curvas, 1827, Comment. soc. reg. sci. Göttingensis recent. cl. math., vol 6, 99-146

[G 2] C. F. Gauss, C. F. Gauss Werke, Vandenhoek & Ruprecht's Verlarg, Göttingen,

[G 3] C. F. Gauss, Zur mathematischen Theorie der electrodynamischen Wirkungen, Werke, Königlichen Gesellschaft der Wissinchaften zu Göttingen, vol. 5, 1877

[Go] R. Godement, Topologie algébrique et théorie des faisceaux, Publ. de l'Inst. math. de Strasbourg, XII, Hermann, Paris, 1958

[Gol] V. Golo, Smooth structures on manifolds with boudary, Dokl. Akad. Nauk USSR, 157(1964)22-25

[Gom 1] D. Gompf, Three exotic R^4's and other anomalies, J. Diff. Geom., 18(1983)317-328

[Gom 2] D. Gompf, An infinte set of exotic R^4's, J. Diff. Geom., 21 (1985)283-300

[Gom 3] D. Gompf, An exotic menagerie, J. Diff, Geom., 37(1993) 199-223

[Gor-L] C. Gordon and J. Luecke, Knots are determined by their complements, J. Amer. Math. Soc. 2(1989)371-415

[Gr-H] M. J. Greenberg and J. R. Harper, Algebraic Topology: A First Course, Benjiamin/Cummings, London-Amsterdam-Don Mills, Ontario-Sydney-Tokyo, 1981

[Gro] A. Grothendieck, Sur quelque points d'algèbre homologique, Tohoku Math. J., (2)9(1957)119-221

[Gu-P] V. Guillemin and A. Pollack, Differential Topology, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1974

[Gui-M] L. Guillou and A. Marin, A la Recherche de la Topologie Perdue: I Du Côté de chez Rohlin, II Le côté de Casson, Birkhäuser, Boston-Basel-Stuttgart, 1986

[Gy] W. Gysin, Zur Homologietheorie der Abbildungen und Faserungen der Mannigfaltigkeiten, Commemt. Math. Helv., 14 (1941)61-122

[H] A. Haefliger, Knotted(4k-1)-sphere in 6k-space, Math. Ann., 75(1962)452-466

[Hak 1] W. Haken, Theorie der Normalflachen, Acta Math. 105 (1961)245-375

[Hak 2] W. Haken, Über das Homöomorphieproblem der 3-Mannigfaltigkeiten I, Math. Zeit., 80(1962)89-120

[Hak 3] W. Haken, Some results on surfaces in 3-manifolds, Studies in Modern Topology, Math. Assor. Amer., distributed by Prentice Hall, 1968, 39-98

[Hau 1] F. Hausdorff, Grundzuge der Mengenlehre, Veit, Leipzig, 1914

[Hau 2] F. Hausdorff, Mengenlehre, Gruytrer, Berlin-Leipzing, 1927

[He] P. Heegaard, Forstudier til en topologisk teori for de algeraiske Sammenhang, det Nordiske Forlag Ernst Bojesen, Copenhaque, 1898, translated into French, Sur l' Analysis Situs, Bull. Soc. Math. France, 44(1916)161-242

[Hei] W. Heil, On P^2-irreducible 3-manifolds, Bull. Amer. Math. Soc., 75(1963)772-775

[Hem 1] J. Hempel, Construction of orientable 3-manifolds, in Topology of 3-manifolds and Related Topics, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1962, 206-212

[Hem 2] J. Hempel, 3-Manifolds, Princeton University Press, 1976

[Hild] H. Hilden, Every closed orientable 3-manifold is a 3-fold branched covering space of S^3, Bull. Amer. Math. Soc. 80 (1974) 1243-1244

[Hilt] P. Hilton, Suspension theorems and generalized Hopf invariants, Proc. Lond. Math. Soc., 1(1951)462-493

[HirG] G. Hirsch, Un isomorphisme attaché aux structures fibrées, C. R. Acad. Sci. Paris, 227(1948)1328-1330

[HirM 1] M. Hirsch, Immersions of manifolds, Trans. Amer. Math. Soc., 93(1959)242-276

[HirM 2] M. Hirsch, Obstructions to smoothing manifolds and

maps, Bull. Amer. Math. Soc., 69(1963)352-356

[HirM 3] M. Hirsch, Differential Topology, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1964

[HirM-M] M. Hirsch and B. Mazur, Smoothings of Piecewise Linear Manifolds, Princeton Univ. Press, 1974

[Hz 1] F. Hirzebruch, On Steenrod's reduced powers, the index of inertia and the Todd genus, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 39(1953) 951-956

[Hz 2] F. Hirzebruch, Arithmetic genera and the theorem of Riemann-Roch for algebraic varieties, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 40 (1954)110-114

[Hz 3] F. Hirzebruch, Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie, Springer, Berlin, 1956, English transl. of third ed.: Topological Methods in Algebraic Geometry, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1978

[Ho] W. V. D. Hodge, The Theory and Applicationa of Harmonic Integrals, Cambridge Univ. Press, 1941

[Hop 1] H. Hopf, Abbildungsklassen n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten, Math. Ann., 96(1926)209-224

[Hop 2] H. Hopf, Vektorfelder in n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten, Math. Ann., 96(1926)225-250

[Hop 3] H. Hopf, Eine Verallgemeinerung der Euler-Poincareschen Formel, Nachr. Ges Wiss. Gottingen, (1928)127-136

[Hop 4] H. Hopf, A new proof of the Lefschetz formula on invariant points, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 14(1928)149-153

[Hop 5] H. Hopf, Über die algebraische Anzahl von Fixpunkten, Math. Zeitschr., 29(1929)493-524

[Hop 6] H. Hopf, Zur Algebra der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten, J. für reine u. angew. Math., 105(1930)71-88

[Hop 7] H. Hopf, Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche, Math. Ann., 104(1931)637-665

[Hop 8] H. Hopf, Die Klassen der Abbildungen der n-dimensionalen Polyeder auf die ndimensionalen Sphäre, Commemt. Math. Helv., 5 (1933)39-45

[Hop 9] H. Hopf, Über die Abbildungen von Sphären auf Sphären von niedriger Dimension, Fund. Math., 25(1935)427-440

[Hop 10] H. Hopf, Über die Topologie der Guppenmannigfaltigkeiten und ihre Verallgemeinerungen, Ann. of Math., 42 (1941)22-52

[Hop 11] H. Hopf, Über den Rang geschlossener Liescher Gruppen, Comment. Math. Helv., 13(1940/41)119-143

[Hop 12] H. Hopf, Fundamentalgruppe und zweite Bettische Gruppe, Comment. Math. Helv., 14(1942)257-309

[Hop 13] H. Hopf, Über die Bettischen Gruppen die einer beliebigen Gruppen gehören, Comment. Math. Helv., 17(1944/45)39-79

[Hop 14] H. Hopf, Einige persönlische Erinnerungen aus der Vorgeschichte der heutigen Topologie, Colloque de Topologie Bruxelles, 1946, C. R. B. M., Louvain et Paris, 1966, 9-20

[Hop 15] H. Hopf, Selecta, Springer, Berlin-Gottinger-Heidelberg-New York, 1964

[Hop-S] H. Hopf and H. Samelson, Ein Satz über die Wirkungsräume geschlossener Liescher Gruppen, Comment. Math. Helv., 13(1940/41)241-251

[Hoso] F. Hosokawa, On ∇-polynomialsof links, Osaka Math. J., 10(1958)273-282

[HOMFLY] J. Hoste, A. Ocneanu, K. Millet, P. Frey, W. Lickorish and D. Yetter, A new polynomial invariant of knots and links, Bull. Amer. Math. Soc. 12(1985)239-246

[Hos-T-W] J. Hoste, M. Thistlewaite and J. Weeks, The first 1,701,936 knots, The Math. Intellegencer, 20, No. 4(1998)33-48

[Hu 1] S. T. Hu, An exposition of the relative homotopy theory,

Duke Math. J. ,14(1947)991-1033

[Hu 2] S. T. Hu, Homotopy Theory, Academic Press, New York-London, 1959

[Hue] W. Huebsch, On the covering homotopy theorem, Ann. of Math. ,61(1955)555-463

[Hur 1] W. Hurewicz, Beiträge zur Topologie der Deformationen I: Höherdimensionalen Homotopiegruppen, Proc. Akad. Wetensch. Amsterdam, 38(1935)112-119

[Hur 2] W. Hurewicz, Beiträge zur Topologie der Deformationen II: Homotopie-und Homologiegruppen, Proc. Akad. Wetensch. Amsterdam, 38(1935)521-528

[Hur 3] W. Hurewicz, Beiträge zur Topologie der Deformationen III: Klassen und Homologietypen von Abbldungen, Proc. Akad. Wetensch. Amsterdam, 39(1936)117-126

[Hur 4] W. Hurewicz, Beiträge zur Topologie der Deformationen IV: Asphärische Räume, Proc. Akad. Wetensch. Amsterdam, 39 (1936)215-224

[Hur 5] W. Hurewicz, On duality theorem, Bull. Amer. Math. Soc. , 47(1941)562-563

[Hur 6] W. Hurewicz, On the concept of fibre spaces, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 41(1955)60-66

[Hur-St] W. Hurewicz and N. Steenrod, Homotopy relations in fibre spaces, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 27(1941)60-64

[Hur-W] W. Hurewicz and H. Wallman, Dimension Theory, Princeton Univ. Press, 1941

[Hus] D. Husemoller, Fibre Bundles, McGraw-Hill, New York, 1966

[Huy] C. Huygens, Œuvres complètes de Christian Huygens, Correspondance 1676-1684, Soc. holl. Sci., La Haye, Martinus Nijhoff, t. 8, 1899

[Jac] W. Jaco, Lectures on Three-Manifold Topology, CBMS Regional Conference Series in Math 43, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1980

[Jac-S] W. Jaco and P. Shalen, Seifert fibered, spaces in 3-manifolds, Memoirs Amer. Math. Soc. 220(1979)

[J 1] I. James, Reduced product spaces, Ann. of Math., 62(1955) 170-197

[J 2] I. James, On the suspension triad, Ann. of Math., 63(1956) 191-247

[J 3] I. James, The suspension triad of a sphere, Ann. of Math., 63 (1956)407-429

[J 4] I. James, On category, in the sense of Lusternik-Schnirelmann, Topology, 17(1978)331-348

[J-W] I. James and J. H. C. Whitehead, The homotopy of sphere bundles over spheres, Proc. Lond. Math. Soc., 4(1954)196-218 and 5(1955)148-166

[Ja] Z. Janiszewski, Œuvres Choisies, Warszawa, 1962

[Jia-L-W-W] B.-J. Jiang, X.-S. Lin, S. Wang and Y.-Q. Wu, Achirality of knots and links, Topology and its Application, 119(2002) 185-208

[Jia-W] B.-J. Jiang and S. Wang, Achirality and planarity, CCM, vol. 2, no. 3, 299-305

[Joh 1] I. Johansson, Über singulare Elementarflächen und das Dehnsche Lemma, Math. Ann., 110(1935)312-330

[Joh 2] I. Johansson, Homotopy equivalences of 3-manifolds with boundaries, Lecture Notes in Math. 761, Springer, 1979

[Jon 1] V. Jones, A polynomial invariant for links via von Neumann algebras, Bull. Amer. Math. Soc. 12(1985)103-111

[Jon 2] V. Jones, Heck algebra representations of braid groups and link polynomials, Ann. of Math., (2)126(1987)335-388

[Jor] C. Jordan, Cours d'analyse de l'Ecole polytechnique, Gauthier-Villars, Paris, 1887, vol. 3

[Ka] M. Karoubi, K-Theory, Springer, 1978

[Kau 1] L. Kauffman, Formal Knot Theory, Math. Notes 30, Princeton Univ. Press, Priceton, NJ, 1983

[Kau 2] L. Kauffman, Stable models and the Jones polynomial, Topology 26(1987)395-407

[Kau 3] L. Kauffman, New invariants in the theory of knots, Amer. Math. Monthly, 95(1988) No. 3, 195-242

[Kau 4] L. Kauffman, On Knots, Annals of Mathematics Studies 115, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1987

[Kaw] A. Kawauchi(河内明夫),通过图式看数学——Louis H. Kauffman 访谈录,数学译林,18 卷第 1 期 64-67

[K] J. L. Kelley, General Topology, Van Nostrand Reinhold, New York, 1955 中译本为:凯莱著吴从炘 吴让泉译《一般拓扑学》,科学出版社,1985

[K-P] J. Kelley and E. Pitcher, Exact homomorphisms sequences in homology theory, Ann. of Math., 48(1947)682-709

[Ke 1] M. Kervaire, Nonparallelizability of the n-sphere for n>7, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 44(1958)280-283

[Ke 2] M. Kervaire, A manifold which does not admit any differentiable structure, Comment. Math. Helv., 34(1960)257-270

[Ke-M 1] M. Kervaire and J Milnor, Bernoulli numbers, homotopy groups, and a theorem of Rohlin, Proc. Intern. Cong. Math., Edinburgh 1958, 454-458

[Ke-M 2] M. Kervaire and J. Milnor, On 2-spheres in a 4-manifold, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 49(1961)1651-1657

[Ke-M 3] M. Kervaire and J. Milnor, Groups of Homotopy spheres I, Ann. of Math., 77(1963)504-537

[Ki 1] R. Kirby, Stable homeomorphisms and the annulus conjecture, Ann. of Math., 89(1969)575-582

[Ki 2] R. Kirby, The Topology of 4-Manifolds, Springer, Berlin-Heidelberg, 1989

[Ki 3] R. Kirby, Problems in low-dimensional topology, Geometric Topology, 1993 Georgia International Topology Conference, August 2-13 1993 University of Georgia, Amer. Math. Soc.-Intern. Press, 1997, Part 2, 35-473

[Ki-S 1] R. Kirby and L. Siebenmann, On the triangulation of manifolds and the Hauptvermutung, Bull. Amer. Math. Soc., 75(1969) 742-749

[Ki-S 2] R. Kirby and L. Siebenmann, Some theorems on topological manifolds, Manifolds-Amsterdam 1970, Lecture Notes in Math., 197, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1971, 1-7

[Ki-S 3] R. Kirby and L. Siebenmann, Foundational Essays on Topological Manifolds, Smoothing and Triangulations, Princeton Univ. Press, 1977

[Kirk] T. P. Kirkman, The enumeration, description and construction of knots with fewer than 10 crossings, Trans. Roy. Soc. Edinburgh, 32(1865)281-309

[Kis] J. Kister, Microbundles are fibre bundles, Bull. Amer. Math. Soc., 69(1963)854-857

[Kle] F. Klein, Über Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale, Eine Erganzung der gewohnlichen Darstellungen, Leipzig, B. G. Teubner, 1882

[Kli] M. Kline, Mathematical Thought from Ancient to Modern Times, Oxford Univ. Press, New York, 1972

[Kn 1] H. Kneser, Die Topologie der Mannigfaltigkeiten, Jahresber. der DMV, 34(1925)1-14

[Kn 2] H. Kneser, Geschlossene Flächen in dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten, Jahresbericht der Deut. Math. Verein., 38 (1929) 248-260

[KnM] M. Kneser, Klassenzahlen definiter quadratischer Formen, Archiv der Math., 8(1957)241-250

[Ko 1] A. Kolmogoroff, Über die Dualität im Aufbau der kombinatorischen Topologie, Mat. Sborn., 1(1936)97-102

[Ko 2] A. Kolmogoroff, Homologiering des Komplexes und des lokal-bicompakten Räumes, Mat. Sborn., 1(1936)701-705

[Kon 1] M. L. Kontsevich, Vassiliev's knot invariants, I. M. Gel'fand Seminar, Adv. Soviet Math. 16, Part 2, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993

[Kon 2] M. L. Kontsevich, Feyman Diagrams and low-dimensional topology, First European Congr. Math. Paris 1992, Vol. II, 97-121, Birkhäuser, Bassel, 1994

[Kon 3] M. L. Kontsevich, Homological algebra of mirror symmetry, Proc. Intern. Congr. Math. Zurich 1994, Vol. II, 120-139, Birkhäuser, Bassel, 1995

[Kos] J.-L. Koszul, Homologie et cohomologie de algebres de Lie, Bull. Soc. Math. France, 78(1950)65-127

[Kr-M] P. B. Kronheimer and T. S. Mrowka, The genus of embedded surfaces in the projective plane, Math. Res. Lett., 1(1994)797-808

[Ku 1] H. Künneth, Über die Bettischen Zahlen einer Produktman-

nigfaltigkeit, Math. Ann., 90(1923)65-85

[Ku 2] H. Künneth, Über die Torsionzahlen von Produktmannigfaltigkeiten, Math. Ann., 91(1924)125-134

[Kur] C. Kuratowski, Topologie, Warszawa, 1933

[La] B. H. Lawson, The Theory of Gauge Fields in Four-Dimensions, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1985

[L 1] H. Lebesgue, Sur la non-applicabilité de deux domaines appartenant respectivement à des espaces à n et n + p dimensions (extrait d'une letter à M. O. Blumenthal), Math. Ann., 70(1911)166-168

[L 2] H. Lebesgue, Sur l'invariance du nombre de dimensions d'un espace et sur le théorème de M. Jordan relatif aux variétés fermées, C. R. Acad. Sci. Paris, 152(1911)841-844

[L 3] H. Lebesgur, Remarques sur les deux premieres démonstrations du théorème d'Euler, relatif aux polyèdres, Bull. Soc. Math. France, 52(1924)315-336

[Le 1] S. Lefschetz, Algebraic surfaces, their cycles and integrals, Ann. of Math., 21(1920)225-258, and 23(1922)33

[Le 2] S. Lefschetz, Continuous transformations of manifolds, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 9(1923)90-93

[Le 3] S. Lefschetz, L'Analysis Situs et la geometrie algébrique,

Gauthier-Villars, Paris, 1924

[Le 4] S. Lefschetz, Intersections and transformations of complexes and manifolds, Trans. Amer. Math. Soc., 28(1926)1-49

[Le 5] S. Lefschetz, Manifolds with a boundary and their transformations, Trans. Amer. Math. Soc., 29(1927)429-462

[Le 6] S. Lefschetz, Closed point sets on a manifold, Ann. of Math., 29(1928)232-254

[Le 7] S. Lefschetz, Duality relations in topology, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 15(1929)367-369

[Le 8] S. Lefschetz, Topology, Amer. Math. Soc. Coll. Publ. No. 12, Providence, RI, 1930

[Le 9] S. Lefschetz, On singular chains and cycles, Bull. Amer. Math. Soc., 39(1933)124-129

[Le 10] S. Lefeschetz, On general manifolds, Amer. J. Math., 55 (1933)469-504

[Le 11] S. Lefeschetz, On locally connected and related sets, Ann. of Math., 35(1934)118-129

[Le 12] S. Lefeschetz, Algebraic Topology, Amer. Math. Soc. Coll. Publ. No. 27, Providence, RI, 1942

[Le 13] S. Lefeschetz, Topics in Topology, Princeton Univ. Press, 1942

[Le 14] S. Lefeschetz, A page of mathematical autobiography, Bull. Amer Math. Soc., 74(1968)

[Le-W] S. Lefschetz and J. H. C. Whitehead, On analytic complexes, Trans. Amer. Math. Soc., 35(1933)510-517

[Leg] A.-M. Legendre, Eléments de Géométrie avec des Notes, Firmin-Didot, Paris, 1794

[Lei] G. W. Leibniz, Leibnizens Mathematische Schriften, vol 2, 1850

[Ler 1] J. Leray, Topologie des espaces de Banach, C. R. Acad. Sci. Paris, 200(1935)1082-1084

[Ler 2] J. Leray, Sur la forme des espaces topologiques et sur les points fixes des représentations, J. Math. Pures Appl., 24(1945)95-248

[Ler 3] J. Leray, L'anneau d'homologie d'une représentation, C. R. Acad. Sci. Paris, 222(1946)1366-1368

[Ler 4] J. Leray, Structure de l'anneau d'homologie d'une représentation, C. R. Acad. Soc. Paris, 222(1946)1419-1422

[Ler 5] J. Leray, Propriétés de l'anneau d'homologie de la projection

d'un espace fibré sur sa base, C. R. Acad. Sci. Paris, 223(1946)395-397

[Ler 6] J. Leray, Sur l'anneau d'homologie de l'espace homogène, quotient d'un groupe clos par un sous-groupe abélien, connexe, maximum, C. R. Acad. Soc. Paris, 223(1946)412-415

[Ler 7] J. Leray, L'homologie filtrée, Coll. Top. alg. C. N. R. S. Paris(1947), 61-82

[Ler 8] J. Leray, Applications continues commutant avec les éléments d'un groupe de Lie, C. R. Acad. Sci. Paris, 228(1949)1784-1786

[Ler 9] J. Leray, Détermination, dans les cas non exceptionnals, de l'anneau de cohomologie de l'espaces homogène quotient d'un groupe de Lie compact par un sous-groupe de même rang, C. R. Acad. Sci. Paris, 228(1949)1902-1904

[Ler 10] J. Leray, L'anneau spectral et L'anneau filtré d'homologie d'un espace localement compact et d'une application continue, J. Math. Pures Appl., (9)29(1950)1-139

[Ler 11] J. Leray, L'homologie d'un espace fibré dont la fibre est connexe, J. Math. Pures Appl., (9)29(1950)169-213

[Ler 12] J. Leray, Sur l'homologie des groupes de Lie, des espaces homogènes et des espace fibrés principaux, Coll. de Topologie (espaces fibrés), Bruxelles 1950, C. R. B. M., Liége et Paris, 1951, 101-

115

[Ler 13] J. Leray, La théorie des points fixes et ses applications en Analyse, Proc. Int. Congress Math. Cambridge 1950, vol 2, 202-208

[Ler-S] J. Leray and J. Schauder, Topologie et équations fonctionnelles, Ann. Ec. Norm. Sup., 51(1934)43-78

[Lev] J. P. Levine, Lectures on group of homotopy spheres, Algebraic and Geometric Topology, Lecture Notes in Math. 1126, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1983, 62-94

[Li] W.-P. Li, Introduction to knot invariants, Unpublished Notes

[Lia] S. D. Liao, On the theory of obstructions of fiber bundles, Ann. of Math., 60(1954)146-191

[Lic 1] W. B. R. Lickorish, A representation of orientable combinatorial 3-manifolds, Ann. of Math., 76(1962)531-540

[Lic 2] W. B. R. Lickorish, The unknotting number of a classic knot, Comtemp. Math. 44(1985)117-121

[Lis 1] J. B. Listing, Vorstudien zur Topologie, Göttinger Studien, Göttingen, 1847

[Lis 2] J. B. Listing, Der Census räumlicher Complexe oder Verallgemeinerung des Euler'schen Satzes von den Polyedern, Abhandlungen der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen,

10(1862)97-180

[Lit] C. N. Little, Alternate ± knots of order 11, Trans. Roy. Soc. Edinburgh, 36(1890)253-255

[Lu-Sch] L. Lusternik and L. Schnirelmann, Méthodes topologiques dans les problèmes variationnels, Act. Scient. Ind. No. 188, Hermann, Paris, 1934

[M] S. Mac Lane, Categories for the Working Mathematician, Springer, New York-Heidelberg-Berlin, 1971

[Ma 1] A. A. Markov, The insolubility of the problem of homeomorphy, Dokl. Akad. Nauk USSR, 121(1958)218-220

[Ma 2] A. A. Markov, The problem of homeomorphy, Proc. Int. Congress Math. Edinburgh 1958, 300-306

[Mas 1] W. Massey, Exact couples in algebraic topology I, Ann. of Math., 56(1952)363-396

[Mas 2] W. Massey, Exact couples in algebraic topology II, Ann. of Math., 57(1953)248-286

[Mas 3] W. Massey, Algebraic Topology: An Introduction, Springer

[Mat] Y. Mathieu, Sur des noeuds qui ne sont pas déterminés par leus complément et problèmes de chirurgie dans les variétés de dimension 3, Thèse, L'Université de Provence, 1990

[Mau] C. R. F. Maunder, Algebraic Topology, Cambridge Univ. Press, Cambridge-London-New York-New Rochelle-Melbourne-Sydney, 1984

[Max] J. C. Maxwell, A treatise on electricity and magnetism, Clarendon Press, Oxford, 1885

[May] W. Mayer, Über abstrakte Topologie, Monatsh. für Math. u. Phys., 36(1929)1-42 and 219-286

[Maz-P] B. Mazur and V. Poenaru, Séminaire de Topologie combinatoire et diffferentielle, Inst. Hautes Scient., 1962

[Me] P. Melvin, 4-dimensional orianted bordism, in Four-Manifold Theory, Contemporary Mathematics 35, 399-405

[Mena-Th] W. Menasco and Thistlewaite, The classification of alternating links, Ann. of Math., (2)138(1993)113-171

[Men] K. Menger, Dimensionstheorie, Teubner, Leipzig, 1928

[Mi 1] J. Milnor, On the total curvature of knots, Ann. of Math. 52 (1950)248-257

[Mi 2] J. Milnor, On the total curvatures of closed space curves, Math. Scand. 1(1953)289-296

[Mi 3] J. Milnor, Construction of universal bundles I, II, Ann. of

Math.,63(1956)272-284 and 430-436

[Mi 4] J. Milnor, On manifolds homeomorphic to the 7-sphere Ann. of Math.,64(1956)399-405

[Mi 5] J. Milnor, The Steenrod algebra and its dual, Ann. of Math.,67(1958)150-171

[Mi 6] J. Milnor, On simply connected 4-manifolds, Symp. Intern. de Top. Alg., Mexico 1956, Mexico, 1958, 122-128

[Mi 7] J. Milnor, Some consequences of a theorem of Bott, Ann. of Math.,68(1958)444-449

[Mi 8] J. Milnor, Defferential Topology (mimeograph), Princeton, 1958 中译本载入:米尔诺著熊金城译《从微分观点看拓扑》,上海科学技术出版社,1983,成为第二部分,70-120

[Mi 9] J. Milnor, On spaces having the homotopy type of a CW-complex, Trans. Amer. Math. Soc.,90(1959)272-280

[Mi 10] J. Milnor, On the cobordism ring Ω^* and a complex analogue, Amer. J. Math.,82(1960)505-521

[Mi 11] J. Milnor, A procedure for killing the homotopy group of differentiable manifolds, Amer. Math. Soc. Symp. Pure Math., III, 1961, 39-55

[Mi 12] J. Milnor, Two complexes that are homeomorphic but com-

binatorially distinct, Ann. of Math., 74(1961)575-590

[Mi 13] J. Milnor, A unique factorization theorem for 3-manifolds, Amer. J. Math., 84(1962)1-7

[Mi 14] J. Milnor, Morse Theory, Princeton Univ. Press, 1963 中译本为:米尔诺著江嘉禾译《莫尔斯理论》,科学出版社,1988

[Mi 15] J. Milnor, Microbundles I, Topology, 3(1964)Suppl. 1, 53-80

[Mi 16] J. Milnor, Lectures on h-cobordism Theorem, Princeton Univ. Press, 1965

[Mi 17] J. Milnor, Topology from the Differentiable Viewpoint, Univ. Press of Virginia, Charlottesville, 1965 中译本为:米尔诺著熊金城译《从微分观点看拓扑》,上海科学技术出版社,1983,成为第一部分,3-67

[Mi 18] J. Milnor, Introduction to algebraic K-theory, Princeton Univ. Press, 1971

[Mi-H] J. Milnor and D. Husemoller, Symmetric Bilinear Forms, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1973

[Mi-M] J. Milnor and J. C. Moore, On the structure of Hopf algebras, Ann. of Math., 81(1965)211-264

[Mi-S] J. Milnor and J. Stasheff, Characteristic Classes, Princeton

Univ. Press, 1974

[Miy] H. Miyasaki, Paracompactness of CW-complexes, Tohoku Math. J., (2), 4(1952)309-313

[Mo] A. F. Möbius, Theorie der elementaren Verwandtschaften, Ber. Verh. Sachs., 15(1863)18-57

[Moi 1] E. Moise, Affine structure in 3-maniflods V, Ann. of Math., 56(1952)96-114

[Moi 2] E. Moise, Geometric Topology in Dimensions 2 and 3, Springer, New York-Heidelberg-Berlin, 1977

[Mon 1] J. Montesinos, A representation of closed, orientable 3-manifolds as 3-fold branched coverings of S^3, Bull. Amer. Math. Soc. 80(1974)845-846

[Mon 2] J. Montesinos, 3-manifolds as 3-fold branched covers of S^3, Quart. J. Math. Oxford, (2)27(1976)84-94

[Moo] R. L. Moore, Concerning upper semi-continuous collections of continua which do not separate a given continuum, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 10(1924)356-360

[Morg] J. W. Morgan, On Thurston's uniformization theorem for three-dimensional manifolds, In H. Bass & J. W. Morgan, The Smith Conjecture, Academic Press, 1984, 37-125

[Mor 1] M. Morse, Relations between the critical points of a real function of n independent variables, Trans. Amer. Math. Soc., 27 (1925)345-396

[Mor 2] M. Morse, The behavior of a function on its critical set, Ann. of Math., 40(1939)62-70

[Mor 3] M. Morse, The Culculus of Variations in the Large, Amer. Math. Soc. Coll. Publ. No. 18, Providence, R. I., 1934

[Mor 4] M. Morse, On elevating n-manifold differentiability, J. Indian Math. Soc., 24(1960)379-400

[Mu 1] J. Munkres, Obstuctions to the smoothing of piecewise differentiable homeomorphims, Ann. of Math, 72(1960)521-554

[Mu 2] J. Munkres, Obstruction to imposing differentiable structures, III. J. Math., 8(1964)361-376

[Mu 3] J. Munkres, Concordance is equivalent to smoothability, Topology, 5(1966)371-389

[Mu 4] J. Munkres, Compatibility of imposed differentiable structures, III. J. Math., 12(1968)610-615

[Mu 5] J. Munkres, Differentiable isotopies on the 2-sphere, Mich. Math. J., 7(1960)193-197

[Mu 6] J. Munkres, Elementary Differential Topology, Princeton

Univ. Press, 1963

[Mu 7] J. Munkres, Topology: A First Course, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1975

[Mu 8] J. Munkres, Elements of Algebraic Topology, Addison-Wesley, Menlo Park, Ca-Reading, Mass-London-Amsterdam-Don Mills, Ontario-Sydney, 1984

[Mur 1] K. Murasugi, The Jones polynomial and classical conjectures in knot theory, Topology 26(1987)187-194

[Mur 2] K. Murasugi, Jones polynomials and classical conjectures in knot theory II, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 102(1987)317-318

[N] J. Nagata, Modern Dimension Theory, North-Holland, Amsterdam, 1965

[Ne] M. H. A. Newman, On the foundations of combinatory Analysis Situs, Proc. Akad. Wetensch. Amsterdam, 29(1926)611-641 and 30(1927)670-673

[Nö] E. Nöther, Ableitungder Elementarteilertheorie aus der Gruppentheorie, Jber. Deutsch. Math. Verein, 34(1926)104

[Nov 1] S. P. Novikov, Some problems in the topology of manifolds connected with the theory of Thom spaces, Dokl. Akad. Nauk USSR, 132(1960)1031-1034

[Nov 2] S. P. Novikov, Diffeomorphisms of simply connected manifolds, Dokl. Akad. Nauk USSR, 143(1962)1046-1049

[Nov 3] S. P. Novikov, Homotopy equivalent smooth manifolds, Izv. Akad. Nauk USSR Ser. Mat. , 28(1964)365-474

[Nov 4] S. P. Novikov, Topological invariance of rational Pontrjagin classes, Dokl. Akad. Nauk USSR, 163(1965)298-300

[Nov 5] S. P. Novikov, Manifolds with free Abelian fundamental groups and their applications(Pontrjgin classes, smoothness, multidimensional knots), Transl. AMS 71(1968)1-42

[Nov 6] S. P. Novikov, Pontrjagin classes, the fundamental group and some prolbems of stable algebra, Essays on Topology and Related Topics, Mémoires dédiés à George de Rham, Springer, 1970, 147-155

[OVZ] P. Orlik, E. Vogt und H. Zieschang, Zur Topologie gefasert-er Dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten, Topology, 6(1967)49-64

[Ot] J.-P. Otal, Le théorème d'hyperbolisation pour les variétés fibreés des dimension 3, Asterisque 235(1996)1-159

[Pa 1] C. Papakyriakopoulos, A new proof of the invariance of the homology groups of a complex, Bull. Soc. Math. Grece, 22(1943)1-154

[Pa 2] C. Papakyriakopoulos, On Dehn's lemma and the asphericity

of knots, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 43 (1957) 169-172 Ann. of Math. 66(1957)1-26

[Pa 3] C. Papakyriakopoulos, On solid tori, Proc. London Math. Soc., 7(1957)281-299

[P 1] H. Poincaré, Sur l'Analysis situs, C. R. Acad. Sci. Paris, 115 (1892)633-636

[P 2] H. Poincaré, Analysis situs, J. Ec. Polyt., 1(1895)1-121

[P 3] H. Poincaré, Complément à l'Analysis situs, Rend. Circ. Matem. Palermo, 13(1889)285-343

[P 4] H. Poincaré, Second complément à l'Analysis situs, Proc. Lond. Math. Soc., 32(1900)277-308

[P 5] H. Poincaré, Troisième complément à l'Analysis situs, Bull. Soc. Math. France, 13(1902)49-70

[P 6] H. Poincaré, Quatrième complément à l'Analysis situs, J. Math. Pure Appl., 8(1902)169-214

[P 7] H. Poincaré, Cinquième complément à l'Analysis situs, Rend. Circ. Matem. Palermo, 18(1904)45-110

[P 8] H. Poincaré, Sur un théorème de géométrie, Rend. Circ. Matem. Palermo, 33(1912)375-407

[P 9] H. Poincaré. La valeur de la science, Flammarion, Paris, 1905

[P 10] H. Poincaré, Dernières pensées, Flammarion, Paris, 1913

[P 11] H. Poincaré, Œuveres I, Gauthier-Villars, Paris, 1928

[P 12] H. Poincaré, Œuvres II, Gauthier-Villars, Paris, 1916

[Po] J. C. Pont, La topologie algébrique des origines à Poincaré, Press Univ. de France, Paris, 1974

[Pt 1] L. S. Pontrjagin, Über den algebraischen Inhalt topologische Dualitätssätze, Math. , Ann, 105(1931)165-205

[Pt 2] L. S. Pontrjagin, The general topological theorem of duality for closed sets, Ann. of Math, 35(1934)904-914

[Pt 3] L. S. Pontrjagin, A classification of continuous transformations of a complex into a sphere, Dokl. Akad. Nauk USSR, 19(1938) 147-149 and 361-363

[Pt 4] L. S. Pontrjagin, Homologies in compact Lie groups, Math. Sborn, 6(1939)389-422

[Pt 5] L. S. Pontrjagin, A classification of the mappings of the 3-dimensional complex into the 2-dimensional sphere, Math. Sborn. , 9 (1941)331-363

[Pt 6] L. S. Pontrjagin, Mappings of a 3-dimensional sphere into an

n-dimensional complex, Dokl. Akad. Nauk USSR, 34(1942)

[Pt 7] L. S. Pontrjagin, Characteristic cycles on manifolds, Dokl. Akad. Nauk USSR, 35(1942)34-37

[Pt 8] L. S. Pontrjagin, On some topological invariants of Riemannian manifolds, Dokl. Akad. Nauk USSR, 43(1944)91-94

[Pt 9] L. S. Pontrjagin, Charactristic classes of differential manifolds, Math. Sborn, 21(1947)233-284

[Pt 10] L. S. Pontrjagin, Homotopy classification of the mappings of an(n + 2)-dimensional sphere on an n-dimensional, Dokl. Akad. Nauk USSR, 70(1950)957-959

[Pt 11] L. S. Pontrjagin, Smooth manifolds and their applications in the theory of homotopy, Trudy Inst. Mat. Steklov No. 45, Press of Akad. Nauk USSR, Moscow, 1955

[Pos 1] M. M. Postnikov, Homotopy invariants of continuous mappings, Dokl. Akad. Nauk USSR, 66(1949)169-172

[Pos 2] M. M. Postnikov, Definition of homology groups of space by means of homotopy invariants, Dokl. Akad. Nauk USSR, 76(1951) 359-362

[Pos 3] M. M. Postnikov, On homotopy type of polyhedra, Dokl. Akad. Nauk USSR, 76(1951)789-791

[Pos 4] M. M. Postnikov, On classifications of continuous mappings, Dokl. Akad. Nauk USSR, 79(1951)573-576

[Pos 5] M. M. Postnikov, Investigations in homotopy theory of continuous mappings, Trudy Inst. Mat. Steklov No. 46, Press of Akad. Nauk USSR, Moscow, 1955

[Pr] E. Prouhet, Notices sur la partie mathématique des oeuvres inédites de Descartes publiées par M. le comte Foucher de Careil, Revue de l'Instruction publique, no. 30, 20e année, Paris, 25 octobre 1860, 484-487

[Pu] D. Puppe, Homotopiemengen und ihre induzierten Abbildungen, Math. Zeitschr. 69(1958)299-344

[Q] D. Quillen, Higher algebraic K-theory, LN in Math. 341, Springer, 1973, 85-145

[Qn] F. Quinn, Ends of maps III: dimensions 4 and 5, J. Diff. Geom., 17(1982)503-521

[R] T. Radó, Über den Begriff der Riemannschen Fläche, Acta Univ. Szeged, 2(1925)101-121

[Ra] R. von Randow, Zur Topologie von dreidimensionalen Baummannigfaltigkeiten, Bonner Math. Schriften 14, Bonn, 1962

[Re] G. Reeb, Sur certain propriétés topologiques des variétés feuilletes, Actual. Sci. industr. 1183, Paris, 1952, 91-154

[Rei 1] K. Reidemeister, Fundamentalgruppe and Überlagerungsraume, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, (1928)69-76

[Rei 2] K. Reidemeister, Knotentheorie, Erg. Math, Springer, 1932

[Rei 3] K. Reidemeister, Homologieringe und Linsenraume, Hamburg, Abhandl, 11(1935)102-109

[Rei-S] K. Reidemeister and Schumann, L-Polynome von Verkettungen, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 10(1934)256-262

[Rh 1] G. de Rham, Sur l'Analysis situs des variétés à n dimensions, J. Math. Pures Appl, (9)10(1931)115-200

[Rh 2] G. de Rham, Relations entre la Topologie et la théorie des intégrales multiples, L'Enseignement Math., 4(1936)213-228

[Rh 3] G. de Rham, Sur les complexes avec automorphismes, Comment. Math. Helv., 12(1939-1940)191-211

[Rh 4] G. de Rham, Complexes à automorphismes et homéomorphie différentiable, Ann. Inst. Fourier, 2(1950)51-67

[Rh 5] G. de Rham, Variétés Différentiables: Formes, Courants, Formes Harmoniques, Hermann, Paris, 1955

[Ri-S] M. Richardson and P. Smith, Periodic transformations of complexes, Ann. of Math., 39(1938)611-633

[Rie 1] B. Riemann, Grundlagen für eine allge meine Theorie der Functionen einer veranderlichen complexen Grosse, Inauguraldissertation, Göttingen, 1851

[Rie 2] B. Riemann, Theorie der Abel'schen Functionen, J. f. Math., 54(1857)

[Ro 1] V. A. Rohlin, On a mapping of the (n + 1)-dimensional sphere into the n-dimensional sphere, Dokl. Akad. Nauk USSR, 80 (1951)541-544

[Ro 2] V. A. Rohlin, Classification of mappings of an (n + 3)-dimensional sphere into the n-dimensional sphere, Dokl. Akad. Nauk USSR, 81(1951)19-22

[Ro 3] V. A. Rohlin, A three-dimensional manifold is the boundary of a four-dimensional one, Dokl. Akad. Nauk USSR, 81(1951)355-357

[Ro 4] V. A. Rohlin, New results in the theory of four-dimensional manifolds, Dokl. Akad. Nauk USSR, 84(1952)221-224

[Ro 5] V. A. Rohlin, Intrinsic definition of Pontrjagin's characteristic cycles, Dokl. Akad. Nauk USSR, 84(1952)449-452

[Ro 6] V. A. Rohlin, Intrinsic homology, Dokl. Akad. Nauk USSR, 89(1953)789-792

[Ro 7] V. A. Rohlin, Characteristic cycles of smooth manifolds, Third Conference of Soviet Mathematicians, vol. 2, 1956, p. 55

[Ro 8] V. A. Rohlin, On Pontrjagin characteristic classes, Dokl. Akad. Nauk USSR, 113(1957)276-279

[Ro 9] V. A. Rohlin, The combinatorial invariance of Pontrjagin classes, Dokl. Akad. Nauk USSR, 114(1957)490-493

[Ro 10] V. A. Rohlin, Internal homology, Dokl. Akad. Naul USSR, 119(1958)876-879

[Ro 11] V. A. Rohlin, The theory of intrinsic homologies, Uspehi Math. Nauk, 14(1959)no. 4, 3-20

[Ro 12] V. A. Rohlin, Two-dimensional submanifolds of four-dimensional manifolds, Functional Anal. Appl. 5(1971)39-48

[Ro-Sv] V. A. Rohlin and A. S. Svarc, Combinatorial invariance of the Pontrjagin classes, Dokl. Akad. Nauk USSR, 1114 (1957) 490-493

[Rol] D. Rolfsen, Knots and Links, Publish of Perish, Berkeley, Ca, 1976

[Ron] Y. W. Rong, Some knots not determined by their complements, Quantum Topology, Series Knots Everything 3, 339-353, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1993

[Rou-S] C. Rourke and B. Sanderson, Block bundles, Ann. of Math.,87(1968)1-28,256-278,431-483

[Sal] D. Salamon, Spin Geometry and Seiberg-Witten Invariants,

[Sam] H. Samelson, Beiträge zur Topologie der Gruppenmannigfeiltigkeiten, Ann. of Math.,42(1941)1091-1137

[Sar] A. Sard, The measure of the critical values of differentiable maps, Bull. Amer Math. Soc.,48(1942)883-890

[Sc] M. Scharlemann, Unknotting number one knots are prime, Invent. Math.,82(1985)37-55

[Sch 1] J. Schauder, Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen, Math. Zeitschr.,26(1927)47-65

[Sch 2] J. Schauder, Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen, Studia Math.,2(1930)171-180

[Sch 3] J. Schauder, Über lineare, vollstetige Operationen, Studia Math.,2(1930)183-196

[Sch 4] J. Schauder, Über den Zusammenhang Zwischen der Eindeutigkeit und Losbarkeit patieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung elleptischen Typus, Math. Ann.,106(1932)661-721

[Sch 5] J. Schauder, Das Anfangswertproblem einer quasilinearen hyperbolischen Differentialgleichung zweiter Ordnung in beliebiger

Anzahl unabhangigen Veranderlichen, Fund. Math., 24(1935)213-246

[Schl] L. Schlafli, Reduction d'une intégrale multiple, J. Math. Pures Appl, 20(1855)359-394

[Schn] L. Schnirelmann, Über einer neue kombinatorische Invariante, Monatsh. für Math u. Physik, 37(1930)131-134

[Scho] A. Schönflies, Die Entwicklung der Lehre von der Punktmannigfaltigkeiten II, Jahresber. der DMV, Erganzungsband II, Leipzig, Teubner, 1908

[Schr 1] O. Schreier, Über die Gruppen $A^bB^a = 1$, Abh. Math. Sem. Hamburg, 3(1923)167-169

[Schr 2] O. Schreier, Über die Erweiterungen von Gruppen I, Monatsh. Math. u. Phys. 34(1926)165-180

[Schr 3] O. Schreier, Die Untergruppen der freien Gruppen, Hamburg. Abhandl., 5(1927)161-183

[Schu] H. Schubert, Kalkul der abzahlende Geometrie, Teubner, Leipzig, 1879

[Schu'] H. Schubert, Knoten mit zwei Brücken, Math. Z., 65 (1956)133-170

[Schur] I. Schur, Über die Darstellung der endlichen Gruppen

durch gebrochene lineare Substitutionen, J. Reine Angew. Math. 127 (1904)20-50

[Sco 1] P. Scott, Finitely generated 3-manifold groups are finitely presented, J. London Math. Soc., (2)6(1973)437-440

[Sco 2] P. Scott, The classification of compact 3-manifolds, in Low-dimensional Topology, London Math. Soc. Lecture Notes 48, 3-7

[Sco 3] P. Scott, The geometries of 3-manifolds, Bull. London Math. Soc., 15(1983)401-487

[Se 1] H. Seifert, Konstruktion dreidimensionaler geschlossener Räume, Ber. Sächs. Akad. Wiss., 83(1931)26-66

[Se 2] H. Seifert, Topologie dreidimensionaler gefaserter Räume, Acta. Math., 60(1932)147-238

[Se 3] H. Seifert, Über das Geschlecht von Knoten, Math. Ann. 112 (1934)571-592

[Se-T 1] H. Seifert and W. Threlfall, Topologische Untersuchungen der Diskontinuitatsbereiche endliche Bewegungsgruppen des dreidimensionalen sphärischen Räumes I, Math. Ann., 104(1930)1-70

[Se-T 2] H. Seifert and W. Threlfall, Lehrbuch der Topologie, Teubner, Leipzig-Berlin, 1934 中译本为:沙爱福施雷发著江泽涵译《拓扑学》,高等教育出版社,1959

[Se-T 2']H. Seifert and W. Threlfall, A Textbook of Topology = An English translation of [Se-T 2], Translated by M. A. Goldman, Academic Press, 1980

[Se-T 3] H. Seifert and W. Threlfall, Variationsrechnung im Grossen(Theorie von Morse), Teubner, Leipzig-Berlin, 1938

[Se-T 4] H. Seifert and W. Threlfall, Old and new results on knots, Canad. J. Math., 2(1950)1-15

[Ser 1] J.-P. Serre, Homologie singuliere des espaces fibrés, Ann. of Math., 54(1951)425-505

[Ser 2] J.-P. Serre, Groupes d'homotopie et classes de groupes abéliens, Ann. of Math., 58(1953)258-294

[Ser 3] J.-P. Serre, Cohomologie modulo 2 des complexes d'Eilenberg-Mac Lane, Comment. Math. Helv., 27(1953)189-232

[Ser 4] J.-P. Serre, Quelques calculs de groupes d'homotopie, C. R. Acad. Sci. Paris, 346(1953)2475-2477

[Ser 5] J.-P. Serre, Lettre à Armand Borel, Oeuvre, vol I, Springer, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, 1986

[Sh] P. Shalen, Infinitely divisible elements in 3-manifold groups, Annals of Math. Studies 84, Priceton University Press, 1975, 293-335

[Sha] P. Shanahan, The Atiyah-Singer Index Theorem, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1978

[Si-T] I. M. Singer and J. A. Thorpe, Lecture Notes on Elementary Topology and Geometry, Springer, 1976 中译本为：辛格索普著干丹岩译《拓扑学与几何学基础讲义》，上海科学技术出版社，1985

[Sm 1] S. Smale, Regular curves on Riemannian manifolds, Trans. Amer. Math. Soc., 87(1958)492-512

[Sm 2] S. Smale, Classification of immersions of the two-sphere, Trans. Amer. Math. Soc. 90(1959)281-290

[Sm 3] S. Smale, Generalized Poincaré conjecture in dimensions greater than four, Ann. of Math., 74(1961)391-406

[Sm 4] S. Smale, On the structure of manifolds, Amer. J. Math., 84 (1962)387-399

[Sp 1] E. Spanier, Cohomology theory for general spaces, Ann. of Math., 49(1948)407-427

[Sp 2] E. Spanier, On the homology of Kummer manifolds, Proc. Amer. Math. Soc., 7(1956)155-160

[Sp 3] E. Spanier, Algebraic Topology, McGraw-Hill, New York, 1966 其前三章中译本为：斯潘尼尔著左再思译《代数拓扑学》，上海科学技术出版社，1987

[Sp-W] E. Spanier and J. H. C. Whitehead, Duality in homotopy theory, Mathematika, 2(1955)56-80

[Spe] E. Sperner, Neuer Beweis für die Invarianz der Dimensionzahl und des Gebietes, Hamburg. Abhandl., 6(1928)265-272

[St 1] J. Stallings, On the loop theorem, Ann. of Math., 72(1960) 12-19

[St 2] J. Stallings, The piecewise linear structure of Euclidean space, Proc. Cambridge Philos. Soc., 58(1962)481-487

[St 3] J. Stallings, On the recursiveness of sets of presentations of 3-manifold groups, Fund. Math., 51(1962)191-194

[St 4] J. Stallings, Lectures on polyhedral topology, Lecture Notes at Tata Institute, 1968

[Ste 1] N. Steenrod, Universal homology groups, Amer. J. Math., 41(1940)833-851

[Ste 2] N. Steenrod, Regular cycles on compact metric spaces, Ann. of Math., 41(1943)833-851

[Ste 3] N. Steenrod, Homology with local coefficients, Ann. of Math., 44(1943)610-627

[Ste 4] N. Steenrod, The classification of sphere bundles, Ann. of Math., 45(1944)295-311

[Ste 5] N. Steenrod, Products of cocycles and extensiona of mappings, Ann. of Math., 48(1947)290-320

[Ste 6] N. Steenrod, Cohomology invariants of mappings, Ann. of Math., 50(1949)954-968

[Ste 7] N. Steenrod, Reduced Powers of cocycles, Proc. Intern. Congress Math. Cambridge 1950, vol. I, 530

[Ste 8] N. Steenrod, The Topology of Fibre Bundles, Princeton Univ. Press, 1951

[Ste 9] N. Steenrod, Reduced powers of cohomology classes, Ann. of Math., 656(1952)47-67

[Ste 10] N. Steenrod, Homology groups of symmetric groups and reduced power operations, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 39(1953)213-217

[Ste 11] N. Steenrod, Cyclic reduced powers of cohomology classes, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 39(1953)217-223

[Ste 12] N. Steenrod, Cohomology operations derived from the symmetric group, Comment. Math. Helv., 31(1956/57)195-218

[Ste-E] N. Steenrod and D. Epstein, Cohomology Operations, Princeton Univ. Press, 1962

[Stei] E. Steinitz, Beiträge zur Analysis Situs, Sitzungsber. Berlin math. Gesellschaft., 7(1908)29-49

[Sti] E. Stiefel, Richtungsfelder und Fernparalleismus in mannigfaltigkeiten, Comment. Math. Helv., 8(1936)3-51

[Stil] J. Stillwell, Classical Topology and Combinatorial Group Theory, Springer, New York-Heidelberg-Berlin, 1980

[Sto] R. Stong, Notes of Cobordism Theory, Princeton Univ. Press, 1968

[Su] D. W. Summers, The role of knot theory in DNA research, Geometry and Topology, Marcel Dekker, 1986

[Sw] R. Switzer, Algebraic Topology: Homotopy and Homology, Springer, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, 1975

[T] P. G. Tait, On knots, Scientific Papers I, Cambridge Univ. Press, London, 1898

[Ta 1] C. Taubes, Self-dual Yang-Mills connections on non-self-dual 4-manifolds, J. Diff. Geom., 17(1982)139-170

[Ta 2] C. Taubes, Gauge theory on asymptotically periodic 4-manifolds, J. Diff. Geom., 25(1987)363-430

[Th 1] R. Thom, Sur une partition en cellules associée a une fonction sur une variété, C. R. Acad. Sci. Paris, 228(1949)973-975

[Th 2] R. Thom, Espaces fibrés en sphères et carrés de Steenrod, Ann. Ec. Norm. Sup., 69(1952)109-181

[Th 3] R. Thom, Quelques propriétés globales des variétés différentiables, Comment. Math. Helv., 28(1954)17-86

[Th 4] R. Thom, Les classes caractéristiques de Pontrjagin des variétés triangulées, Symp. Intern. de Topologie Algebraica, Mexica, 1956, Univ. Nac. Autonoma de Mexico & UNESCO, 1958, 54-67

[Th 5] R. Thom, Des Variétés triangulées aux variétés différentiables, Proc. Int. Congress Math. Edinburgh, 1958, 248-255

[Ths] E. Thomas, The generalized Pontrjagin cohomology operations and rings with divided powers, Mem. Amer. Math. Soc., 27 (1957)

[Thu 1] W. P. Thurston, Geometry and topology of 3-manifolds, Lecture Notes from Princeton Univ. 1977

[Thu 2] W. P. Thurston, Hyperbolic geometry and 3-manifolds, in Low-dimensional Topology, London Math. Soc. Lecture Notes 48, 10-25

[Thu 3] W. P. Thurston, Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry, Bull. Amer. Math. Soc. 6 (1982) 357-381

[Ti] H. Tietze, Über die topologischen Invariants mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten, Monatsh. für Math. u. Phys., 19 (1908) 1-118

[To 1] H. Toda, Calcul de groupes d'homotopie des sphères, C. R. Acad. Sci. Paris, 240(1955)147-149

[To 2] H. Toda, A topological proof of theorems of Bott and Borel-Hirzebruch for homotopy groups of unitary groups, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, Ser. A, Math., 32(1962)103-119

[Todd] J. A. Todd, The arithmetical invariants of algebraic loci, Proc. Lond. Math. Soc., (2), 43(1937)190-225

[Tr] H. F. Trotter, Non-invertible knots exist, Topology 2(1963) 275-280

[Tu] A. Tucker, Degenerate cycles bound, Math. Sborn., 3(1938) 287-288

[U 1] K. Uhlenbeck, Removable singularities in Yang-Mills fields, Comm. Math. Phys. 83(1982)11-30

[U 2] K. Uhlenbeck, Connections with L bounds on curvature, Comm. Math. Phys. 83(1982)31-42

[Ur 1] P. Urysohn, Mémoire sur les multiplicités Cantorriennes, Fund. Math., 7-8(1925-1926)

[Ur 2] P. Urysohn, Works on Topology and Other Fields of Mathematics, Moscow-Leningrad, 1951

[vK] E. van Kampen, On the connection between the fundamental groups of some related spaces, Amer J. Math., 55(1933)255-260

[Vas] V. A. Vassiliev, Cohomology of knot spaces, Theory of Singularities and its Applications, Adv. Soviet Math. Vol. 1, Amer. Math, Soc., Providence, RI, (1990)23-69

[V 1] O. Veblen, Theory of plane curves in nonmetrical analysis situs, Trans. Amer. Math. Soc., 6(1905)83-98 and 14(1913)65-72

[V 2] O. Veblen, Analysis Situs, Amer. Math. Soc. Coll. Publ. No. 5 II, New York, 1921

[Vi] J. W. Vick, Homology Theory, Academic Press, New York-London, 1971

[Vie 1] L. Vietoris, Über den höheren Zusammenhang kompakter Räume und eine Klasse von zusammenhangstreue Abbildungen, Math. Ann., 97(1927)454-472

[Vie 2] L. Vietoris, Über den Homologiegruppen der Vereinigung zweier Komplexe, Monatsh. für Math. u. Phys., 37(1930)159-162

[W 1] B. L. van der Waerden, Kombinatorische Topologie, Jahresher. der DMV, 39(1929)121-139

[W 2] B. L. van der Waerden, Topologische Begrundung des Kalkuls der abzahlende Geometrie, Math. Ann., 102(1930)337-362

[Wald 1] F. Waldhausen, Gruppen mit Zentrum und 3-mannigfaltigkeiten, Topology, 6(1967)505-517

[Wald 2] F. Waldhausen, On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large, Ann. of Math., 87(1968)56-88

[Wald 3] F. Waldhausen, Eine Klassen von 3-dimensionalen mannigfaltigkeiten I, Invent. Math., 3(1967)308-333

[Wald 4] F. Waldhausen, Eine Klassen von 3-dimensionalen mannigfaltigkeiten II, Invent. Math., 4(1967)87-117

[Wa 1] C. T. C. Wall, Determination of the cobordism ring, Ann. of Math., 72(1960)292-311

[Wa 2] C. T. C. Wall, On the orthogonal groups of unimodular quadratic forms, Math. Ann., 147(1962)328-338

[Wa 3] C. T. C. Wall, On the orthogonal groups of unimodular quadratic forms II, J. Reine Angew. Math., 213(1963)122-136

[Wa 4] C. T. C. Wall, Diffeomorphisms of 4-manifolds, J. London Math. Soc., 39(1964)131-140

[Wa 5] C. T. C. Wall, On simply connected manifolds, J. London Math. Soc., 39(1964)141-149

[Wa 6] C. T. C. Wall, An extension of a result of Novikov and Browder, Amer. J. Math. ,88(1966)20-32

[Wa 7] C. T. C. Wall, Surgery of Non-simply connected manifolds, Ann. of Math. ,84(1966)217-276

[Wa 8] C. T. C. Wall, Surgery on compact manifolds, Academic Press, London-New York, 1970

[Wa 9] C. T. C. Wall, On the work of W. Thursfon, Proc. of ICM, 1983, Warszawa, 11-14

[Wal] A. H. Wallace, Modifications and cobounding manifolds, Canad. J. Math. ,12(1960)503-528

[Walt] S. von Waltershausen, Gauss zum Gedachtnis, Hirzel, Leipzig, 1856

[Wan 1] H. C. Wang, Some examples concerning the relations between homology and homotopy groups, Indagationes Math. , 9 (1947)384-386

[Wan 2] H. C. Wang, The homology groups of the fibre bundles over a sphere, Duke Math. J. ,16(1949)33-38

[War] F. W. Warner, Foundation of Differentiable Manifolds and Lie Groups, Springer, New York-Berlin-Heidelberg-Tokyo, 1983

[Wei] A. Weill, Sur les théorèmes de de Rham, Comment. Math. Helv., 26(1952)119-145

[Wey 1] H. Weyl, Die Idee der Riemannschen Fläche, Teubner, Leipzig, 1913

[Wey 2] H. Weyl, Repartician de Corriente en una red conductora, Revista Math. Hisp.-Amer. 5(1923)153-164

[Wey 3] H. Weyl, Analysis Situs Combinatorio, Rev. Math. Hisp.-Amer. 5(1923)209-218, 241-248, 278-279; 6(1924)33-41

[Whi] J. White, Self-linking and the Gauss integral in higher dimensions, Amer. J. Math., 91(1969)693-728

[WhG] G. Whitehead, Elements of Homotopy Theory, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1978

[WhH 1] J. H. C. Whitehead, Certain theorems about three-dimensional manifolds, Quart. J. Math. Oxford 5(1934)308-320

[WhH 2] J. H. C. Whitehead, Three-dimensional manifolds (corrigendum), Quart. J. Math. Oxford 6(1935)80

[WhH 3] J. H. C. Whitehead, Simplicial spaces, nuclei and m-groups, Proc. Lond. Math. Soc., (2)45(1939)243-327

[WhH 4] J. H. C. Whitehead, On C^1-complexes, Ann. of Math. 41 (1940)808-829

[WhH 5] J. H. C. Whitehead, On adding relations to homotopy groups, Ann. of Math., 42(1941)409-428

[WhH 6] J. H. C. Whitehead, On incidence matrices, nuclei and homotopy types, Ann. of Math., 42(1941)1197-1239

[WhH 7] J. H. C. Whitehead, On the groups $\pi_r(V_{n,m})$ and sphere bundles, Proc. Lond. Math. Soc., (2) 48 (1944) 243-291; (2) 49 (1947)479-481

[WhH 8] J. H. C. Whitehead, On simply connected 4-dimensional polyhedra, Comm. Math. Helv., 22(1949)48-92

[WhH 9] J. H. C. Whitehead, Combinatorial homotopy I, II, Bull. Amer. Math. Soc., 55(1949)213-245 and 453-496

[WhH 10] J. H. C. Whitehead, On the realizability of homotopy groups, Ann. of Math., 50(1949)261-263

[WhH 11] J. H. C. Whitehead, A certain exact sequence, Ann. of Math., 52(1950)51-110

[WhH 12] J. H. C. Whitehead, Simple homotopy types, Amer. J. Math., 72(1950)1-57

[WhH 13] J. H. C. Whitehead, On the theory of obstructions, Ann. of Math., 54(1951)66-84

[WhH 14] J. H. C. Whitehead, The Mathematical Works of J. H. C. Whitehead, Vol II: Complexes and Manifolds, Pergamon Press, London-New York, 1962

[WhH 15] J. H. C. Whitehead, The Mathematical Works of J. H. C. Whitehead, Vol III: Homotopy Theory, Pergamon Press, London-New York, 1962

[WhH 16] J. H. C. Whitehead, On 2-spheres in 3-manifolds, Bull. A. M. S. 64(1958)161-166

[WhH 17] J. H. C. Whitehead, On finite cocycles and the sphere theorem, Colloquium Math. 6(1958)271-281

[Why 1] H. Whitney, Differentiable manifolds in euclidean space, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 21(1935)462-463

[Why 2] H. Whitney, Sphere spaces, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 21 (1935)464-468

[Why 3] H. Whitney, Differentable manifolds, Ann. of Math., 37 (1936)645-680

[Why 4] H. Whitney, The imbedding of manifolds in families of analytic manifolds. Ann. of Math., 37(1936)865-878

[Why 5] H. Whitney, Topological properties of differentiable manifolds, Bull. Amer. Math. Soc., 43(1937)785-805

[Why 6] H. Whitney, The maps of an n-complex into an n-sphere, Duke Math. J., 3(1937)51-55

[Why 7] H. Whitney, On products in a complex, Ann. of Math., 39 (1938)397-432

[Why 8] H. Whitney, Tensor products of abelian groups, Duke Math. J., 4(1938)495-528

[Why 9] H. Whitney, Some combinatorial properties of complexes, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 26(1940)143-148

[Why 10] H. Whitney, On the theory of sphere bundles, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 26(1940)148-153

[Why 11] H. Whitney, On the topology of differentiable manifolds, Lectures in Topology, Conference at Univ. of Michigan, 1940, Univ. of Michigan Press, 101-141

[Why 12] H. Whitney, The self-intersections of a smooth n-manifold in 2n-space, Ann. of Math., 45(1944)220-246

[Why 13] H. Whitney, The singularties of a smooth n-manifold in (2n-1)-space, Ann. of Math., 45(1944)247-293

[Why 14] H. Whitney, On singularities of mappings of euclidean spaces I: Mappings of the plane into the plane, Ann. of Math., 62 (1955)374-410

[Why 15] H. Whitney, Geometric Integration Theory, Princeton Univ. Press, 1957

[Why 16] H. Whitney, Moscow 1935: Topology moving toward America, Collected Papers, 97-117

[Whyb] G. Whyburn, Analytic Topology, Amer. Math. Soc. Coll. Publ. No. 28, 1942

[Wi] R. Wilder, Topology of Manifolds, Amer. Math. Soc. Coll. Publ. No. 32

[Wit] E. Witten, Monopoles and four-manilfolds, Math. Res. Lett., 1(1994)769-796

[Wu 1] Wu Wen-Tsün, On the product of sphere bundles and the duality theorem modulo two, Ann. of Math., 49(1948)641-653

[Wu 2] Wu Wen-Tsün, Sur l'existence d'un champ d'éléments de contact on d'une structure complex sur une sphere, C. R. Acad. Sci. Paris, 226(1948)2117-2119

[Wu 3] Wu Wen-Tsün, Sur les classes caractéristiques d'un espace fibrées en sphères, C. R. Acad. Sci. Paris, 227(1948)582-584

[Wu 4] Wu Wen-Tsün, Sur la second obstacle d'un champ d'éléments de contact dans une structure fibre sphérique, C. R. Acad. Sci. Paris, 227(1948)815-817

[Wu 5] Wu Wen-Tsün, Sur le structure presque complexe d'une variété différentiable réele de dimension 4, C. R. Acad. Sci. Paris, 227 (1948) 1076-1078

[Wu 6] Wu Wen-Tsün, Classes caractēristiques et i-carrés d'une variété, C. R. Acad. Sci. Paris, 230(1950) 508-511

[Wu 7] Wu Wen-Tsün, Les i-carrés dans une variété grassmannienne, C. R. Acad. Sci. Paris, 230(1950) 918-920

[Wu 8] Wu Wen-Tsün, Sur les classes caractéristiques des structures fibrées sphériques, Publ. de l'Inst. Math. de l'Univ. de Strasbourg, XI, Hermann, Paris, 1952

[Wu 9] Wu Wen-Tsün, On Pontrjagin classes II, Scientia Sinica, 4 (1955) 455-490

[Wu 10] Wu Wen-Tsün, On the realization of complexes in euclidean spaces I, Scientia Sinica, 7(1958) 251-297

[Wu 11] Wu Wen-Tsün, On the realization of complexes in euclidean spaces II, Scientia Sinica, 7(1958) 365-387

[Wu 12] Wu Wen-Tsün, On the realization of complexes in euclidean spaces III, Scientia Sinica, 8(1959) 133-150

[Wu 13] Wu Wen-Tsün, A Theory of Embedding, Immersion and Isotopy of Poloytopes in a Euclidean Space, Science Press, Beijing, 1965

[Y] Yen Chih-Tah, Sur les polynômes de Poincaré des groupes de Lie exceptionnels, C. R. Acad. Sci. Paris, 228(1949)628-630

[陈] 陈吉象,代数拓扑基础讲义,高等教育出版社,1987

[江] 江泽涵,拓扑学引论,上海科学技术出版社,1978

[姜] 姜伯驹,绳圈的数学,湖南教育出版社,1991

[廖刘] 廖山涛和刘旺金,同伦论基础,北京大学出版社,1980

[苏] 苏竞存,流形的拓扑学,武汉大学出版社,1992

[左黄] 左再思和黄锦能,拓扑学,武汉大学出版社,1992

[吴] 吴文俊,可剖形在欧氏空间中的实现问题,科学出版社,1978

索　　引

本索引包括人名索引和术语索引.术语索引前半为汉文在前西文在后,后半为西文在前汉文在后,西文术语以英文为主,个别为德文或法文.检索时汉文数字表示章,阿拉伯数字表示节,其中数字 0 表示该章之引言.

人名索引

术语索引

*　　　*　　　*